УДК 681.511.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ОТДЕЛЯЮЩИХСЯ ОТ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ СОСТАВНЫХ ЧАСТЕЙ ПО ОГРАНИЧЕННОМУ ЧИСЛУ ПУСКОВ

А.С. Фадеев
(*ФГУП «ЦЭНКИ»*),
В.Н. Арсеньев
(*Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского*)

Рассматривается задача оценивания характеристик разброса начальных параметров движения отделяющихся от ракеты-носителя составных частей по ограниченному числу пусков и результатам модельных экспериментов. Предложен новый подход к её решению, позволивший повысить точность оценивания характеристик разброса.

Ключевые слова: *ракета-носитель, отделяющаяся часть, область рассеивания, разброс начальных параметров, априорная информация, ограниченное число пусков, методы оценивания, отношение правдоподобия, апостериорные оценки, точность оценивания.*

Введение

Область рассеивания точек падения отделяющихся от ракеты-носителя (РН) частей (ОЧ) на земной поверхности существенно зависит от разброса параметров движения РН относительно расчётных значений в момент разделения. Отклонения параметров движения центра масс от расчётных значений и разброс параметров углового движения связаны, в первую очередь, с работой системы управления РН на активном участке траектории и обусловлены, в основном, погрешностями системы управления.

Оценить характеристики разброса параметров движения РН в момент разделения, которые одновременно определяют начальные условия движения ОЧ, можно путём моделирования возмущённого движения РН на активном участке траектории. Однако в процессе модельного эксперимента невозможно учесть все факторы, влияющие на рассеивание фазовых координат РН относительно номинальной траектории. Получаемая таким образом область рассеивания начальных параметров движения ОЧ является достаточно приближённой.

Объективные данные о рассеивании параметров движения ОЧ в момент отделения от РН можно получить только по результатам пусков РН. При этом должны выполняться два условия:

– число пусков должно быть достаточно большим;

– условия проведения пусков должны быть идентичными.

Условия пусков полагаются идентичными при совпадении граничных значений (точек старта и орбит выведения), программ управления, вероятностных характеристик параметров системы управления (СУ) РН и массогабаритных характеристик полезной нагрузки.

Число пусков РН в одних и тех же условиях может быть ограниченным (например в настоящее время имеются результаты только нескольких пусков РН «Союз-2», причём условия их проведения отличаются).

Для повышения точности оценивания характеристик разброса начальных параметров движения ОЧ в некоторых заданных условиях пусков необходимо:

– получить модельные оценки характеристик разброса;

– объединить результаты моделирования и реальных пусков РН и получить апостериорные оценки характеристик разброса начальных параметров движения ОЧ.

Постановка задачи

Полагается, что p – мерный вектор вариаций фазовых координат РН в момент отделения ОЧ $\Delta\hat{\mathbf{X}}$ распределён по нормальному закону

$$\varphi_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\left(\Delta\mathbf{X};\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}},\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}\left|\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right|^{1/2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\Delta\mathbf{X}-\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right)^{T}\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}^{-1}\left(\Delta\mathbf{X}-\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right)\right\},$$

с математическим ожиданием $\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$ и ковариационной матрицей $\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$.

По результатам моделирования возмущённого движения РН на активном участке траектории получены априорные (расчётные) оценки $M_{\text{р}}$, $K_{\text{р}}$ параметров $\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$, $\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$, а по результатам $N_{\text{с}}$ пусков, которые представлены выборкой $\Delta X_i, i=\overline{1,N_{\text{с}}}$, рассчитаны опытные (статистические) оценки

$$M_{\text{c}} = \frac{1}{N_{\text{c}}}\sum_{i=1}^{N_{\text{c}}} \Delta X_i;$$

$$K_{\text{c}} = \frac{1}{N_{\text{c}}}\sum_{i=1}^{N_{\text{c}}} \left(\Delta X_i - M_{\text{c}}\right)\left(\Delta X_i - M_{\text{c}}\right)^{\text{T}}.$$

Число пусков $N_{\text{c}} \geq p$.

Необходимо получить апостериорные оценки M_{a} и K_{a} математического ожидания $\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$ и ковариационной матрицы $\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$ вектора вариаций фазовых координат РН в момент отделения ОЧ.

Существуют различные способы апостериорного оценивания характеристик СУ [1 – 8].

Группа методов [2, 4, 7, 8], основанная на формуле Байеса, предполагает знание закона распределения априорных оценок. В настоящее время нет универсальных рекомендаций по выбору этого распределения.

Вторую большую группу составляют методы, основанные на использовании коэффициента значимости априорной информации, определяющего её вес в апостериорной оценке [1, 3, 5, 6]. Проблема выбора этого коэффициента, в общем случае, не решена.

В основе предлагаемого метода апостериорного оценивания характеристик разброса начальных параметров движения ОЧ лежат два опирающиеся на здравый смысл положения. Во-первых, априорная информация не должна противоречить результатам пусков РН. И, во-вторых, вес априорной информации в апостериорной оценке не может превышать значения опытных данных.

Общий подход к определению апостериорных оценок. Объединение априорной информации и опытных данных позволяет повысить точность оценивания неизвестных характеристик в том случае, когда результаты модельных исследований, проведенных до пусков РН, не противоречат данным, полученным по результатам пусков. В противном случае привлечение априорной информации может не только не повысить качество оценивания, а, наоборот, исказить опытные данные.

Поэтому полагается, что априорная и опытная информация о характеристиках разброса начальных параметров движения ОЧ является однородной. Это означает, что априорные оценки M_{p} и K_{p} могут рассматриваться как оценки, полученные по некоторой не реальной, а гипотетической выборке из совокупности с законом распределения $N\left(\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}, \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right)$. По аналогии с опытными данными её можно представить в виде $\text{X}_{\text{г}i}, i = \overline{1, N_{\text{p}}}$, где N_{p} – неизвестное число гипотетических пусков РН, а в качестве весовых коэффициентов, определяющих доли априорной и опытной информации в апостериорных оценках, использовать числа N_{p} и N_{c} соответственно. Чем ближе априорная информация к результатам пусков, тем больше её вес. При этом всегда $N_{\text{p}} \leq N_{\text{c}}$.

Множества результатов реальных пусков РН $\Delta X_i, i = \overline{1, N_{\text{c}}}$ и гипотетических пусков $\Delta X_{\text{г}i}, i = \overline{1, N_{\text{p}}}$ рассматриваются как выборки из одной генеральной совокупности с нормальным законом распределения.

Вводится общая функция правдоподобия

$$L = \prod_{i=1}^{N_{\text{c}}} \varphi_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\left(\Delta X_i; \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}, \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right) \prod_{i=1}^{N_{\text{p}}} \varphi_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\left(\Delta X_{\text{г}i}; \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}, \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right). \quad (1)$$

Поскольку можно представить

$$\prod_{i=1}^{N_{\text{c}}} \varphi_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\left(\Delta X_i; \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}, \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right) = L(M_{\text{c}}, K_{\text{c}}; \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}, \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}) = \frac{1}{(2\pi)^{N_{\text{c}}/2}\left|\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right|^{N_{\text{c}}/2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{N_{\text{c}}}{2}\left[tr(K_{\text{c}}\mathbf{K}^{-1}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}) + \left(M_{\text{c}} - \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right)^T \mathbf{K}^{-1}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\left(M_c - \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right)\right]\right\};$$

$$\prod_{i=1}^{N_{\text{p}}} \varphi_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\left(\Delta X_{\text{г}i}; \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}, \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right) = L(M_{\text{p}}, K_{\text{p}}; \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}, \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}) = \frac{1}{(2\pi)^{N_{\text{p}}/2}\left|\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right|^{N_{\text{p}}/2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{N_{\text{p}}}{2}\left[tr(K_{\text{p}}\mathbf{K}^{-1}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}) + \left(M_{\text{p}} - \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right)^T \mathbf{K}^{-1}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\left(M_{\text{p}} - \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right)\right]\right\},$$

где введены обозначения

$$M_{\text{p}} = \frac{1}{N_{\text{p}}}\sum_{i=1}^{N_{\text{p}}} \Delta X_{\text{г}i};$$

$$K_{\text{p}} = \frac{1}{N_{\text{p}}}\sum_{i=1}^{N_{\text{p}}} \left(\Delta X_{\text{г}i} - M_{\text{p}}\right)\left(\Delta X_{\text{г}i} - M_{\text{p}}\right)^{\text{T}}, \text{ то}$$

$$L = L(M_{\text{c}}, K_{\text{c}}; \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}, \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}) L(M_{\text{p}}, K_{\text{p}}; \mathbf{M}_{\Delta\hat{X}}, \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}) = \frac{1}{(2\pi)^{\left(N_{\text{c}}+N_{\text{p}}\right)/2}\left|\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right|^{\left(N_{\text{c}}+N_{\text{p}}\right)/2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{N_{\text{c}}}{2}\left[tr(K_{\text{c}}\mathbf{K}^{-1}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}) + \left(M_{\text{c}} - \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right)^T \mathbf{K}^{-1}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\left(M_{\text{c}} - \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right)\right] - \right.$$
$$\left. -\frac{N_{\text{p}}}{2}\left[tr(K_{\text{p}}\mathbf{K}^{-1}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}) + \left(M_{\text{p}} - \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right)^T \mathbf{K}^{-1}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\left(M_{\text{p}} - \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}\right)\right]\right\}. \quad (2)$$

Тогда в качестве апостериорных оценок, учитывающих априорную и опытную информацию, берутся

$$\left(M_{\text{a}}, K_{\text{a}}\right) = \arg \max_{\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}, \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}} L = \arg \max_{\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}, \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}} \ln L.$$

Поскольку функция плотности нормального распределения является регулярной в смысле первой и второй производных [9, 10], то апостериорные оценки M_{a} и K_{a} математического ожидания $\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$ и ковариационной матрицы $\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$ вектора вариаций фазовых координат РН в момент отделения ОЧ могут быть определены из необходимых условий максимума L (или $\ln L$)

$$\left.\frac{\partial \ln L}{\partial \mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}}\right|_{\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}=M_{\text{a}}, \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}=K_{\text{a}}} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial \ln L}{\partial \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}}\right|_{\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}=\mathbf{M}_{\text{a}}, \mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}=\mathbf{K}_{\text{a}}} = 0. \qquad (3)$$

Решения этих уравнений имеют вид:

$$M_{\text{a}} = \frac{N_{\text{c}} M_{\text{c}} + N_{\text{p}} M_{\text{p}}}{N_{\text{c}} + N_{\text{p}}}; \qquad (4)$$

$$K_{\text{a}} = \frac{N_{\text{c}} K_{\text{c}} + N_{\text{p}} K_{\text{p}}}{N_{\text{c}} + N_{\text{p}}} + \frac{N_{\text{c}} N_{\text{p}} \left(M_{\text{c}} - M_{\text{p}}\right)\left(M_{\text{c}} - M_{\text{p}}\right)^{\text{T}}}{\left(N_{\text{c}} + N_{\text{p}}\right)^2}. \qquad (5)$$

Найденные таким образом апостериорные оценки характеристик разброса начальных параметров движения ОЧ фактически являются оценками максимального правдоподобия, полученными по объединённой выборке $X_i, i = \overline{1, N_{\text{c}}}$, $X_{ri}, i = \overline{1, N_{\text{p}}}$ и обладают всеми положительными свойствами этих оценок.

Входящая в формулы (4), (5) величина N_{p} определяет вес априорной информации, полученной методом моделирования, в апостериорных оценках M_{a} и K_{a}.

Определение числа гипотетических пусков N_{p}. Поскольку априорная информация не должна противоречить результатам пусков РН, а её вес в апостериорной оценке не должен превышать значения опытных данных, то полагается

$$N_p = v^* N_c, \qquad (6)$$

где $0 < v^* \le 1$ – отношение правдоподобия для проверки гипотезы об однородности априорной и опытной информации (H: $\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}} = M_{\text{p}}$, $\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}} = K_{\text{p}}$) [11]

$$v^* = \left|K_{\text{c}} K_{\text{p}}^{-1}\right|^{N_{\text{c}}/2} \exp\left\{\frac{N_{\text{c}}}{2}\left[p - tr\left(K_{\text{c}} K_{\text{p}}^{-1}\right) - \left(M_{\text{c}} - M_{\text{p}}\right)^T K_{\text{p}}^{-1}\left(M_{\text{c}} - M_{\text{p}}\right)\right]\right\}. \qquad (7)$$

Если для заданного уровня значимости γ величина $z^* = -2\ln v^*$ меньше критического значения z_y (или $v^* \ge e^{-z_y/2}$), то принимается решение о возможности совместной обработки априорных и опытных данных. Порядок определения критической границы z_y для различных законов распределения подробно рассмотрен в [11].

Из (6) видно, что вес априорной информации в апостериорных оценках не больше веса опытных данных, т. е. всегда выполняется условие $N_{\text{p}} \le N_{\text{c}}$.

Можно показать, что при ограниченном числе пусков N_c точность апостериорных оценок (4), (5) характеристик разброса начальных параметров движения ОЧ выше точности оценок, полученных только по результатам реальных пусков, в среднем в $\delta = 1 + v^*$ раз. Чем ближе априорная информация к результатам пусков, тем больше величина отношения правдоподобия (7) и выигрыш в точности оценивания. Повышение точности за счёт использования априорной информации будет максимальным ($\delta = 2$) при $v^* = 1$, т. е. при полном совпадении априорных и опытных оценок ($M_{\text{c}} = M_{\text{p}}$, $K_{\text{c}} = K_{\text{p}}$).

Иллюстративный пример

Рассматривается двумерный вектор $\Delta\hat{\mathbf{X}}$ изохронных вариаций фазовых координат СУ РН, распределённый по нормальному закону с математическим ожиданием $\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$ и ковариационной матрицей $\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$. Известны априорные оценки $M_{\text{p}} = [1{,}2 \quad 1{,}2]^{\text{T}}$, $K_{\text{p}} = \begin{bmatrix} 1{,}44 & 0{,}72 \\ 0{,}72 & 1{,}44 \end{bmatrix}$ параметров $\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$, $\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$ и опытные оценки $M_{\text{c}} = [1 \quad 1]^{\text{T}}$, $K_{\text{c}} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$, полученные методом максимального правдоподобия по результатам $N_{\text{c}} = 11$ пусков РН. Необходимо найти апостериорные оценки математического ожидания $\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$ и ковариационной матрицы $\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$.

Значение отношения правдоподобия для проверки гипотезы об однородности априорной и опытной информации, рассчитанное по формуле (7), $v^* = 0{,}4259$, а $z^* = 1{,}7073$.

При уровне значимости $\gamma = 0{,}05$ граничное значение $z_y = 14{,}3446$ [11]. Поскольку $z^* < z_y$, то гипотеза об однородности априорной и опытной информации принимается и $N_{\text{p}} = 0{,}4259$, $N_{\text{c}} = 4{,}6844$.

По формулам (3), (4) определяются апостериорные оценки математического ожидания $\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$ и ковариационной матрицы $\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$:

$$M_{\text{а}} = [\,1{,}06 \;\; 1{,}06]^{\text{T}};\; K_a = \begin{bmatrix} 1{,}14 & 0{,}57 \\ 0{,}57 & 1{,}14 \end{bmatrix}.$$

При бо́льшем отличии априорных данных от опытных, например, при $M_{\text{р}}$ = $[0{,}8 \;\; 1{,}2]^{\text{T}}$, $K_{\text{р}} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{bmatrix}$, получаются следующие значения: v^* = 0,0290, z^* = 7,0819, $N_{\text{р}}$ = 0,3188. Поскольку условие $z^* < z_y$ выполняется, то можно положить, что априорные и опытные данные принадлежат к одной совокупности. Однако из-за малого значения величины v^* влияние априорной информации на апостериорные оценки будет незначительным. Действительно, в данном случае апостериорные оценки параметров $\mathbf{M}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$ и $\mathbf{K}_{\Delta\hat{\mathbf{X}}}$ имеют вид $M_{\text{а}}$ = $[0{,}99 \;\; 1{,}01]^{\text{T}}$; $K_{\text{а}} = \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}50 \\ 0{,}50 & 1{,}00 \end{bmatrix}$ и практически совпадают с опытными оценками.

Заключение

Предложенный подход к оцениванию характеристик разброса начальных параметров движения ОЧ позволяет объединить априорную (полученную в процессе моделирования) и опытную (полученную в процессе пусков РН) информацию, и повысить точность оценок соответствующих характеристик.

При ограниченном числе пусков $N_{\text{с}}$ и некоторых распределениях $\Delta\hat{\mathbf{X}}$ возникают трудности, связанные с определением граничного значения z_y, необходимого для проверки однородности априорной и опытной информации. Следует заметить, что процедура проверки принадлежности всей имеющейся информации к одной генеральной совокупности может быть опущена, поскольку при наличии больших расхождений в данных, полученных до и после проведения пусков РН, величина отношения правдоподобия v^*, фактически определяющая вес априорной информации в апостериорных оценках, близка к нулю. Малое значение отношения правдоподобия и, как следствие, числа гипотетических испытаний $N_{\text{р}}$ практически исключает влияние априорной информации на результат. Этот момент достаточно наглядно продемонстрирован в приведённом примере.

Литература

1. Пугачев В. Н. Комбинированные методы определения вероятностных характеристик / В. Н. Пугачев. – М. : Сов. радио, 1973. – 256 с.
2. Шаракшанэ А. С. Испытания сложных систем / А. С. Шаракшанэ, И. Г. Железнов. – М. : Высшая школа, 1974. – 184 с.
3. Элементы теории испытаний и контроля технических систем / под ред. Р.М. Юсупова. – Л. : Энергия, 1978. – 192 с.
4. Кринецкий Е. И. Лётные испытания ракет и космических аппаратов / Е. И. Кринецкий [и др.]. – М. : Машиностроение, 1979. – 464 с.
5. Щербаков П. С. Использование априорной информации для уточнения опенок параметров / П.С. Щербаков // Изв. АН СССР. Автом. и телемех. – 1988. – № 5. – С. 80 – 89.
6. Арсеньев В. Н. Метод апостериорного оценивания показателей качества системы при ограниченном объеме информации / В. Н. Арсеньев // Изв. вузов СССР. Приборостроение. – 1991. – № 11. – С. 16 – 22.
7. Моррис У. Наука об управлении. Байесовский подход / У. Моррис. – М. : Мир, 1971. – 304 с.
8. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения / С. Р. Рао. – М. : Наука, 1968. – 548 с.
9. Леман Э. Проверка статистических гипотез / Э. Леман. – М. : Наука, 1979. – 408 с.
10. Уилкс С. Математическая статистика / С. Уилкс. – М. : Наука, 1967. – 632 с.
11. Арсеньев В. Н. Новые методы принятия решений при ограниченных экспериментальных данных / В. Н. Арсеньев. – СПб. : ВКА имени А. Ф. Можайского, 1999. – 90 с.

Поступила в редакцию 02.10.2012

***Александр Сергеевич Фадеев**, канд. техн. наук, генеральный директор, т. (495) 631-82-89, e-mail: tsenki@roscosmos.ru.*
***Владимир Николаевич Арсеньев**, д-р техн. наук, профессор, т. (911) 262-02-22, e-mail: vladar56@mail.ru.*