УДК 629.78

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭЙЛЕРА – ЛАМБЕРТА ДЛЯ РАСЧЁТА ПРОГРАММЫ УПРАВЛЕНИЯ СБЛИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В НЕЦЕНТРАЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

В.И. Миронов, Ю.В. Миронов, М.М. Макаров

Рассматривается задача определения программы управления сближением космического аппарата с орбитальным объектом. Так как импульсные программы управления не учитывают влияния продолжительности активного участка, предложен алгоритм расчёта программы управления сближением космического аппарата в нецентральном гравитационном поле Земли с конечной тягой. Для расчёта программы управления предлагается использовать метод приближённого корректирующего оператора. Достоинство данного метода заключается в высокой экономичности вычислений. В качестве приближённого корректирующего оператора принят алгоритм определения импульсной программы управления движением космического аппарата в центральном поле методом Эйлера – Ламберта, дополненный формулой Циолковского для определения продолжительности активного участка траектории. Приведены результаты расчётов затрат характеристической скорости на выполнение маневра встречи в зависимости от угловой дальности цели. Также для сравнения представлены такие зависимости для импульсных программ управления.

***Ключевые слова**: сближение космических аппаратов, программа управления, дальнее наведение, встреча, краевая задача, метод приближённого корректирующего оператора.*

Введение

Среди многих задач практической космонавтики важное место имеет задача управления движением активного космического аппарата (КА) при его сближении с пассивным орбитальным объектом (ОО). КА должен перелететь в определённую точку пространства за заданное время. Это приводит к решению краевой задачи. Существо такой задачи, например, при манёврах с одним активным участком, сводится к определению элементов орбиты перелёта для граничных условий $t_0, \bar{r}_0, \bar{V}_0, \bar{r}_1$ за заданное время T, где $\bar{r}_0, \bar{V}_0$ – значения векторов координат и скорости движения КА на исходной орбите в начальный момент времени t_0, а $\bar{r}_1$ – вектор координат целевой точки манёвра. Указанные краевые задачи в большинстве случаев решают в импульсной постановке при помощи методов Эйлера – Ламберта, Гаусса или их модификаций в рамках модели центрального гравитационного поля Земли (ГПЗ)[1]. Это допущение часто используется при предварительном анализе траекторий, при оценивании временных параметров маневра и энергетических затрат, а также при наведении на активном участке. В действительности движение КА происходит в реальном поле Земли, а изменение скорости осуществляется за конечный промежуток времени. Отмеченные факторы могут привести к значительным отклонениям реальной траектории от её расчётных значений [2 – 4]. Так, под влиянием возмущений, обусловленных отличием реального поля Земли от центрального, для КА, движущегося по круговой орбите высотой 200 км, смещение вдоль орбиты за один виток может достигать 160 км, а боковое смещение – 30 км [2].

Существенное изменение траекторий полёта КА может быть вызвано влиянием протяжённости по времени исполнения расчётных импульсов скорости. Различные уровни тяги приводят к отличным друг от друга траекториям при одних и тех же начальных фазовых координатах. Результаты численных исследований, приведённых, например, в [2, 4] показывают, что протяжённость по времени исполнения расчётного импульса существенно влияет на точность выведения, особенно при малых уровнях тяги.

Таким образом, допущение об импульсном характере силы тяги двигательной установки (ДУ) КА не остаётся справедливым при переходе к задаче наведения на активных участках, хотя и может быть использовано частично, например, в методе наведения по требуемой скорости. При наведении на активном участке с использованием этого метода можно по-прежнему игнорировать конечное время действия тяги и управлять КА так, как будто в каждый момент времени аппарат располагает бесконечно большой тягой. Такой подход, естественно, будет вызывать определённые потери энергии и снижение точности наведения, чем и объясняются неоднократные попытки учесть продолжительность действия тяги при наведении. Но так как получить решение уравнений движения КА на активном участке достаточно сложно, такие попытки обычно сводятся или к соответствующему переносу начала активного участка (разнесению реального активного участка симметрично относительно заранее определённого момента приложения импульса) или же к введению поправок в параметры импульсной программы управления [2, 3].

При уточнённых расчётах траекторий допущение об импульсном характере приложения тяги также является неудовлетворительным, особенно если управляющее ускорение от тяги не слишком велико. Справедливость импульсной аппроксимации необходимо проверять в каждой задаче, как для отдельных участков траектории, так и для всей траектории встречи.

В данной статье предлагается алгоритм расчёта программы управления движением КА при его сближении с ОО, позволяющий достаточно строго учесть как нецентральность ГПЗ, так и неимпульсный характер тяги ДУ КА.

Алгоритм расчёта программы управления движением космического аппарата

Рассмотрим следующую задачу управления движением КА при его переводе из начального состояния $\bar{r}_0, \bar{V}_0$ в требуемое конечное состояние $\bar{r}_1$ за заданное время T.

Уравнения движения КА имеют следующий вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{r}} = \bar{V}; \\ \dot{\bar{V}} = \bar{g}(\bar{r}, t) + \bar{u}(t), \; t \in [t_0, T], \end{cases}$$

где $\bar{u}(t)$ – вектор управляющего ускорения; $\bar{g}(\bar{r}, t)$ – гравитационное ускорение, соответствующее принятой модели ГПЗ.

Вектор управляющего ускорения определяется через параметры ДУ и направляющие косинусы ориентации вектора тяги следующим выражением

$$\bar{u}(t) = \frac{c\beta}{1 - \beta t} \cdot \bar{\alpha},$$

где

$$\beta = \begin{cases} \beta_{\text{зад}}, \text{ при } t \in [t_0, T_1]; \\ 0, \quad \text{при } t \in [T_1, T]; \end{cases} \quad \bar{\alpha}^T \cdot \bar{\alpha} = 1;$$

$$\bar{r} = (X, Y, Z)^T, \quad \bar{V} = (V_X, V_Y, V_Z)^T,$$
$$\bar{\alpha} = (\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z)^T = const.$$

В этих соотношениях: c – скорость истечения газов; $\beta = \dfrac{\dot{m}}{m_0}$ – относительный секундный расход топлива; $\dot{m}$ – секундный расход массы топлива; m_0 – начальная масса КА; T_1 – продолжительность активного участка траектории (АУТ) КА; $\bar{\alpha}$ – вектор направляющих косинусов силы тяги ДУ КА.

Требуется найти вектор параметров управления:

$$\bar{u} = (T_1, \alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z); \qquad \bar{\alpha}^T \bar{\alpha} = 1,$$

путём решения краевой задачи

$$\bar{r}_T = \bar{r}\left[\bar{r}_0, \bar{V}_0, T, \bar{u}\right],$$

где $\bar{r}_T = (X_T, Y_T, Z_T)$ – координаты конечной точки траектории перелёта за заданное время T.

Поставленная задача предполагает учёт нецентральности гравитационного поля Земли и конечной тяги при расчёте программ управления КА на этапе дальнего наведения. Получаемое решение является квазиоптимальным, так как предполагается постоянная ориентация вектора тяги на АУТ.

Для решения задачи воспользуемся методом приближённого корректирующего оператора (ПКО) [5].

Пусть требуется найти такой вектор управления $\bar{u}$, который переводит управляемый объект из исходного состояния $\bar{x}_0$ на траекторию оптимального движения, обеспечивающую достижение заданных граничных условий.

Предположим, что нам известен точный нелинейный оператор связи A между параметрами начального состояния объекта $\bar{x}_0$ и вектором $\bar{u}$.

При заданных $\bar{x}_0$ и $\bar{u}$ полные нелинейные дифференциальные уравнения движения

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

могут быть проинтегрированы на любой момент времени с помощью, например, методов численного интегрирования. Эту процедуру интегрирования зададим оператором A, так что

$$\bar{x}(t) = A(\bar{x}_0, \bar{u}, t).$$

Требуемое управление $\bar{u}$, обеспечивающее достижение заданной терминальной точки $\bar{x}_T$ должно удовлетворять условию

$$\bar{x}_T = A\left(\bar{x}_0, \bar{u}, T\right), \qquad (1)$$

где T – время достижения целевой точки.

Допустим далее, что известен приближённый оператор A_1, устанавливающий приближённую связь между величинами $\bar{x}_0, \bar{u}, t,$ и $x(t)$, так что

$$\bar{x}(t) = A_1\left(\bar{x}_0, \bar{u}, t\right).$$

Будем также считать, что для приближённой модели движения, заданной оператором A_1, известен обратный оператор A_1^{-1}, по вектору управления $\bar{u}$. Обратный оператор A_1^{-1} выражает алгоритм решения приближённой задачи оптимального управления для приближённой модели связи

$$\bar{x}_T = A_1\left(\bar{x}_0, \bar{u}, T\right). \qquad (2)$$

В практической ситуации оператор A_1 может формироваться либо путём пренебрежения рядом физических факторов в полной модели движения, либо посредством формального упрощения точного оператора A, либо комбинацией этих приёмов. Из определения операторов A_1 и A_1^{-1} следует

$$A_1^{-1}\left[A_1(\bar{u})\right] = \bar{u}. \qquad (3)$$

Используя приближённый оператор A_1, запишем условие точной связи (1) в следующей эквивалентной форме

$$\bar{x}_T = A_1(\bar{u}) + \Delta A(\bar{u}),$$

где

$$\Delta A(\bar{u}) = A(\bar{u}) - A_1(\bar{u}),$$

или

$$A_1(\bar{u}) = \bar{x}_T - \Delta A(\bar{u}).$$

Подвергнем левую и правую части этого равенства операторному преобразованию A_1^{-1}. Тогда в силу (3) будем иметь

$$\bar{u} = A_1^{-1}\left[x_T - \Delta A(\bar{u})\right].$$

Для решения этого нелинейного операторного уравнения применим метод последовательных приближений. В результате получим итерационный процесс

$$\bar{u}_{k+1} = A_1^{-1}\left[x_T - \Delta A(\bar{u}_k)\right],$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Начальное значение управления находим из условия $\Delta A = 0$, так что

$$\bar{u}_1 = A_1^{-1}\left(\bar{x}_T\right).$$

Это соответствует решению приближённой задачи управления для модели (2).

Рассмотрев несколько итераций, приходим к следующей вычислительной схеме

$$u_{k+1} = A_1^{-1}\left[\bar{x}_T - \sum_{i=0}^{k} \bar{\Delta}(\bar{u}_i)\right], \; k = 1, 2, \ldots .$$

где $\bar{\Delta}(\bar{u}_i) = A(u_i) - \bar{x}_T$.

Выбор приближённого уравнения и оператора A_1^{-1} может быть осуществлён множеством различных способов в конкретной ситуации с учётом специфики исходной задачи. Для этого могут применяться как формальные приёмы упрощения исходных моделей, так и методы их аппроксимации и приближённого решения.

Важная особенность метода ПКО – для каждой итерации значение $A(\bar{u})$ вычисляется один раз. Применительно к рассматриваемой в данной работе задаче управления это означает, что для очередного уточнения вектора неизвестных параметров дифференциальные уравнения краевой задачи интегрируются один раз. Таким образом обеспечивается высокая экономичность вычислений.

Условия сходимости рассматриваемого вычислительного процесса устанавливаются на основе известного принципа сжатых отображений [5]. Для того чтобы реализовать данный метод при решении поставленной задачи расчёта программы управления движением КА в нецентральном гравитационном поле Земли с учётом неимпульсного характера силы тяги ДУ КА, необходимо сформировать соответствующий приближенный корректирующий оператор. В качестве такого оператора принят алгоритм определения импульсной программы управления движением КА в центральном поле методом Эйлера – Ламберта [1]. При этом ограничимся случаем эллиптических переходных орбит.

Применительно к условиям рассматриваемой задачи вычислительная схема метода ПКО принимает следующий вид

$$\bar{u}_{k+1} = M\left[\sum_{i=1}^{k} \bar{S}(\bar{u}_k)\right],\ k = 1, 2, ...,$$

где $M(\cdot) = A_1^{-1}(\cdot)$ – приближённый корректирующий оператор, выражающий алгоритм приближенного решения задачи относительно управления $\bar{u}$; $\bar{S}(\bar{u}_k)$ – промах в *k*-й итерации.

В условиях рассматриваемой задачи в состав вектора определяемых параметров входят продолжительность АУТ T_1 и вектор направляющих косинусов тяги $\bar{\alpha}$.

Промах в *k*-й итерации определяется по формуле

$$\bar{S}(\bar{u}_k) = \bar{r}\left[\bar{r}_0, \bar{V}_0, T, \bar{u}_k\right] - \bar{r}_1. \qquad (4)$$

В интересах решения поставленной задачи в состав приближённого корректирующего оператора $M(\cdot)$ включим следующие алгоритмы.

1. Алгоритм расчёта импульсной программы управления КА в центральном ГПЗ за заданное время (метод Эйлера – Ламберта)

$$\Delta\bar{V}_1 = \Delta\bar{V}_1(\bar{r}_0, \bar{V}_0, \bar{r}_T, T).$$

2. Алгоритм расчёта параметров управления:

$$-T_1 = \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\Delta V_1}{c}}\right) \text{– формула Циолковского}$$

$$-\ \bar{\alpha} = \frac{\Delta\bar{V}_1}{\Delta V_1}.$$

В соответствии с изложенным выше общую вычислительную схему решения рассматриваемой задачи методом ПКО можно представить следующим образом.

1. По заданным начальным условиям $\bar{r}_0, \bar{V}_0, \bar{r}_1, T$ и формулам приближённого корректирующего оператора производится расчёт параметров АУТ КА $T_1, \bar{\alpha}$ в первом приближении

$$\bar{u}_1 = (T_1, \bar{\alpha}).$$

2. Интегрирование уравнений движения КА на активном и пассивном участках траектории полёта в нецентральном ГПЗ:

$$\text{– АУТ –}\quad t \in \left[t_0, T_k\right], \bar{u} = \bar{u}_k,\ k = 1, 2, ...$$

$$\text{– ПУТ –}\quad t \in \left[T_k, T\right], \bar{u} = 0.$$

3. Определение промаха по формуле (4) и вычисление новой смещённой точки прицеливания.

4. Расчёт уточнённых значений параметров управления для новой точки прицеливания с помощью ПКО.

5. Далее вычисления повторяются, начиная с п. 2, пока не будет обеспечена требуемая точность расчётов:

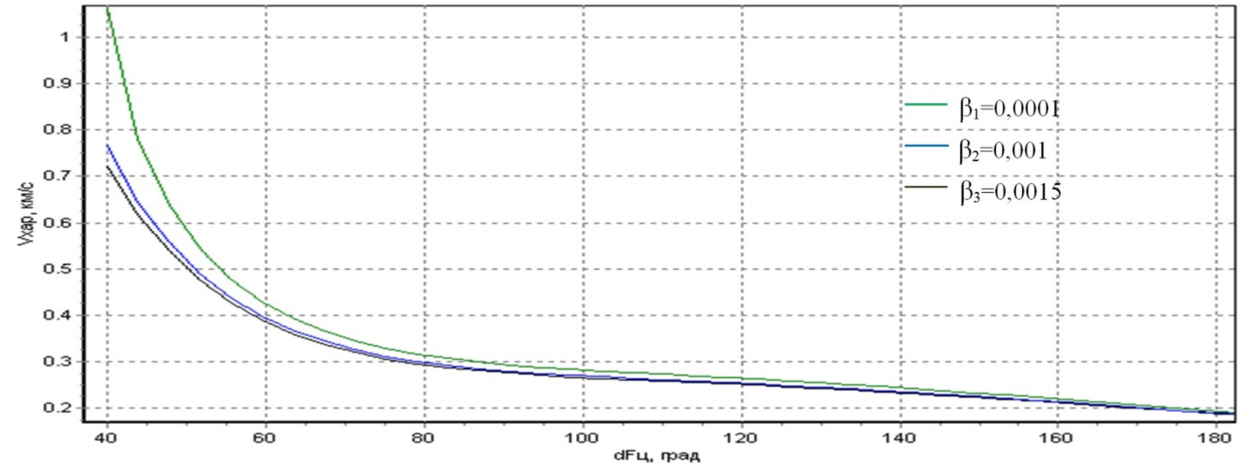
$$\left|\bar{S}(\bar{u}_k)\right| \le \Delta\bar{r}_{\text{зад}},$$

где $\Delta\bar{r}_{\text{зад}}$ – требуемая точность расчёта программы управления, характеризующая методическую точность попадания в заданную точку прицеливания.

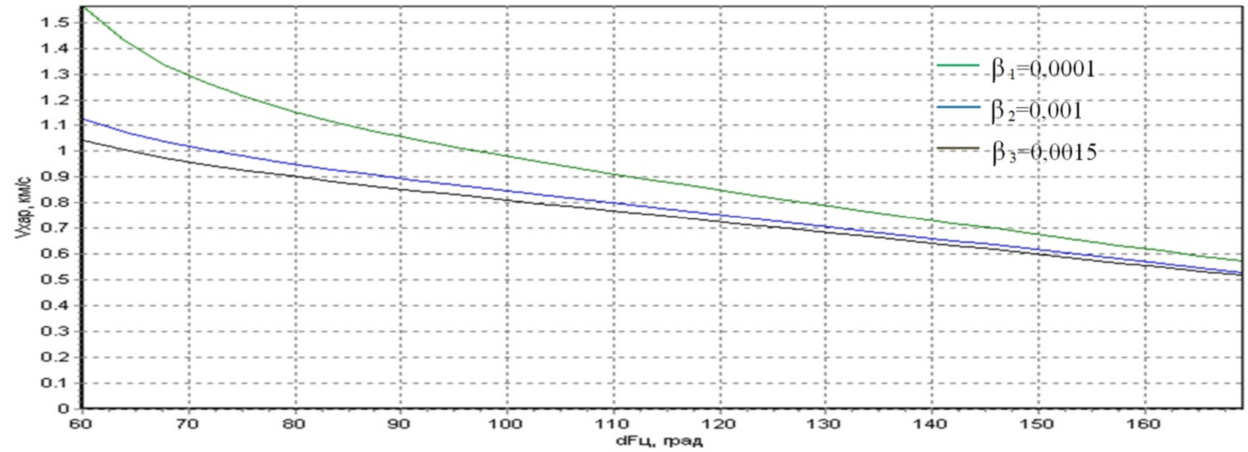
Ниже представлены некоторые результаты численных исследований рассмотренного алгоритма расчёта квазиоптимального управления движением КА.

Расчёты проводились при различных вариантах высот орбит КА и ОО, при различных значениях относительного секундного расхода топлива β, в широком диапазоне угловых дальностей и времени перелета. Угловая дальность полёта изменялась в диапазоне от 40 до 200 градусов. При этом полагалось, что в исходном состоянии КА находится на круговой орбите высотой *H*=500 км с наклонением *i*=60º и аргументом широты *u*=0º. Расчёты проводились для значения скорости истечения газов *c*=3000 м/с.

Для параметров орбит ОО принимались значения высоты полёта $H_1 = 1000$ км и $H_2 = 1500$ км, наклонения *i*=60º и аргумента широты *u*=5º.



а



б

Рис. 1. Зависимость затрат характеристической скорости от угловой дальности ОО и относительного секундного расхода топлива КА при H_{OO}, км: *а* – 1000; *б* – 1500

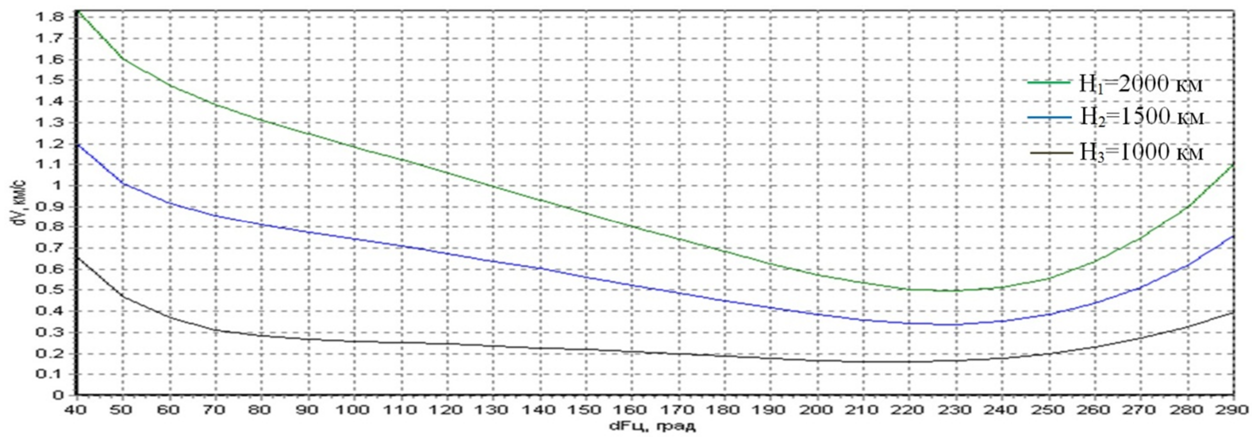


Рис. 2. Зависимость импульсных затрат характеристической скорости от угловой дальности и высоты полёта ОО

Результаты исследования затрат характеристической скорости от угловой дальности для различных значений высоты ОО и относительного секундного расхода топлива β КА приведены на рис. 1.

На рис. 2 для сравнения приведены зависимости импульсных затрат характеристической скорости от угловой дальности полёта для различных значений высоты орбиты ОО.

Выводы

Анализ данных, полученных в ходе численных исследований, позволяет сделать следующие выводы.

С увеличением высоты полёта и уменьшением относительного секундного расхода топлива затраты характеристической скорости увеличиваются. Наиболее существенное расхождение наблюдается в области значений угловой дальности полёта, ограниченной диапазоном от 90 до 130 градусов.

Импульсные оценки энергетических затрат дают заниженные значения требуемых приращений характеристической скорости. В рассмотренном диапазоне исходных данных при использовании импульсной программы управления затраты характеристической скорости отличаются на 5 – 20% в меньшую сторону относительно затрат, рассчитанных с учётом конечной тяги ДУ. Так, например, при угловой дальности 150 град и β=0,0015 1/с затраты характеристической скорости возрастают на 8 – 12% для высот орбит ОО 1000 и 1500 км соответственно относительно импульсных оценок;

Полученные данные позволяют оценить минимально допустимую угловую дальность перелёта при заданных запасах характеристической скорости и заданном относительном секундном расходе топлива. Так, например, в рассматриваемых расчётных условиях при располагаемых запасах $V_{хар} = 400$ м/с, β=0,0015 1/с и $H_{ОО}$=1000 км минимально допустимая угловая дальность перелёта составляет примерно 60 град.

Литература

1. Бэттин Р. Х. Наведение в космосе / Р. Х. Бэттин. – М.: Машиностроение, 1966. – 448 с.
2. Бебенин Г. Г., Скребушевский Б. С., Соколов Г. А. Системы управления полётом КА / Г. Г. Бебенин и др.. – М.: Машиностроение, 1978. – 272 с.
3. Лебедев А. А., Соколов В. Б. Встреча на орбите / А.А. Лебедев и др. – М.: Машиностроение, 1969. – 366 с.
4. Шаталов В. А., Селетков С. Н., Скребушевский Б. С. Применение ЭВМ в системах управления КА / В. А. Шаталов и др. – М.: Машиностроение, 1974. – 208 с.
5. Миронов В. И., Миронов Ю. В., Юсупов Р. М. Синтез итерационных алгоритмов решения краевых задач и нелинейных уравнений / В. И. Миронов и др. // Изв. вузов. Приборостроение. – 2010. – Т. 53. – № 1. – С. 9 – 15.

Поступила в редакцию 03.12.2014

***Вячеслав Иванович Миронов**, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, д-р техн. наук, профессор, т. (812) 347-95-21; email: mironuv@yandex.ru.*
***Юрий Вячеславович Миронов**, ОАО «Научно-инженерный центр Санкт-Петербургского электротехнического университета», д-р техн. наук, доцент, ведущий специалист, т. (812) 703-75-83; email: mironuv@yandex.ru.*
***Михаил Михайлович Макаров**, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, адъюнкт, т. (812) 347-95-21, (911) 277-32-91; email: mckom@rambler.ru.*

EULER'S – LAMBERT'S METHOD APPLICATION TO THE PROXIMITY CONTROL CALCULATION PROGRAM OF THE SPACE CRAFTS IN THE NON-CENTRAL GRAVITATIONAL FIELD OF EARTH

MIRONOV V.I., MIRONOV IU.V., MAKAROV M.M.

An article revises the task, related to determining a program, controlling the space craft proximity with an orbital object. As far as the impulse programs do not take the boost-phase time into account, an algorithm has been suggested, that calculates the space craft proximity control program in the non-central gravitational field of Earth with the finite-thrust. Approximate adjusting operator method has been suggested to calculate parameters of the control program. The advantage of that method is related to its high calculation efficiency. As an approximate adjusting operator, an algorithm has been accepted, that determines the space craft motion control impulse program in the central field, using Euler's – Lambert's method, amplified by the Tsiolkovsky formula to determine the trajectory boost-phase time. Calculation results are provided, indicating the characteristic velocity consumption required to perform the collision – maneuver, depending on the targets range angle. For comparison, these dependences for the impulse control programs are demonstrated.

Key words: *Space crafts proximity, control program, long-range guidance, collision, boundary problem, approximate adjusting operator method.*

Reference

1. Bettin R. Kh. Space guidance / Bettin R. Kh. – Machinery manufacturing, 1966. – 448 p.
2. Bebenin G. G., Skrebushevskii B. S., Sokolov G. A. Space craft flight control systems / Bebenin G. G. & others. – M.: Machinery manufacturing, 1978. – 272 p.
3. Lebedev A. A., Sokolov V. B. Collision on orbit / Lebedev A. A. & others. – M.: Machinery manufacturing, 1969. – 366 p.
4. Shatalov V. A., Seletkov S. N., Skrebushevskii B. S. Computer device usage in the space craft flight control systems / Shatalov V. A. & others. – M.: Machinery manufacturing, 1974. – 208 p.
5. Mironov V. I., Mironov Iu. V., Iusupov R. M. Synthesis of the boundary problem and nonlinear equation solving iteration algorithm / Mironov V. I.& others // University news (Izvestiia). Instrumentation. – 2010. – T. 53. – № 1. – P. 9 – 15.

Mironov Viacheslav Ivanovich*, Mozhaisky Military Space Academy*
Ph. D. of Engineering, professor., tel.: (812) 347-95-21; email: mironuv@yandex.ru.
Mironov Iuri Viacheslavovich*, JC « Saint Petersburg State Electrotechnical University engineering research center», Ph. D. of Engineering, associate professor, leading specialist,*
tel.: (812) 703-75-83; email: mironuv@yandex.ru.
Makarov Mikhail Mikhailovich*, Mozhaisky Military Space Academy, adjunct,*
tel.: (812) 347-95-21, (911) 277-32-91; email: mckom@rambler.ru.