УДК 62-503.56:621.3.078

МОДЕРНИЗАЦИЯ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО СУЖЕНИЯ ИСХОДНОГО МНОЖЕСТВА ВЕКТОРНЫХ ОЦЕНОК

Р. Б. Лобов

Представлен математический аппарат метода последовательного сужения исходного множества векторных оценок, позволяющего решать многокритериальные задачи. Даются определение и основные принципы метода. Определяются главные недостатки, предлагается модернизация метода, выявляются ситуации, в которых возможна реализация предлагаемого подхода. Сформулировано и рассмотрено несколько теорем, приведены их доказательства и следствия, позволяющие обосновать метод последовательного сужения исходного множества векторных оценок. Преимуществом и одной из основных целей модернизации метода являются минимизация участия лица, принимающего решение, в качестве которого выступает эксперт или группа экспертов, а также существенно снижается объём вычислительных процедур по сравнению с другими аналогичными методами, что позволит находить оптимальные режимы работы в управлении электротехнической системой насосной станции водоснабжения.

Ключевые слова: *метод последовательного сужения векторных оценок, решение многокритериальных задач, бинарные отношения, сужение исходного множества.*

Введение

В настоящее время существует большое количество методов принятия решений, применяемых для решения однокритериальных и многокритериальных задач (МКЗ). Такими являются метод уступок, метод использования функции полезности, метод главного критерия и многие другие. Примером МКЗ служит выбор режима управления электротехнической системой насосной станции водоснабжения населённого пункта, в основе которой лежит алгоритм рационального выбора и принятия решения.

Одним из методов МКЗ является метод ELECTRE, разработанный профессором Бернардом Роем [1]. Данный метод основан на попарном сравнении многокритериальных альтернатив. В методе ELECTRE от лица, принимающего решение (ЛПР), в качестве которого выступает эксперт (или группа экспертов), требуется назначение весов критериев, что менее трудоемко по сравнению с построением функции полезности. Но на практике оказывается, что, казалось бы, такая не сложная задача не только ставит в тупик, но и кардинально меняет результат в зависимости от предпочтений того или иного эксперта.

Существует метод последовательного сужения исходного множества векторных оценок (метод ПСИМВО) за счет дополнительного объективного критерия, базирующийся на методе ELECTRE, позволяющий в существенной степени уменьшить нагрузку на ЛПР [2].

Данная методика действительно позволяет выбрать наиболее оптимальное решение при достаточно большом количестве критериев и альтернатив. Существенным недостатком данного метода нужно признать большой объём вычислительных процедур.

Как следствие, предлагается модернизация метода ПСИМВО.

Метод ПСИМВО

В предлагаемом методе последовательного сужения исходного множества векторных оценок бинарное отношение на Y формируется, как множество ориентированных графов (орграфов) $G = \{G_1, \ldots, G_r\}$, каждый из которых соответствует той или иной комбинации «равно, больше, меньше» (=, >, <). При этом, поскольку q_i, $i = 1, k$ могут быть любые положительные числа, то для любой пары оценок (Y_i, Y_j) результатом бинарного сравнения может быть любое из соотношений вида:

$$\begin{aligned} &[q^+(Y_i, Y_j) / q^-(Y_i, Y_j)] \geq c; \\ &[q^+(Y_i, Y_j) / q^-(Y_i, Y_j)] \leq 1/c; \\ &1/c \leq [q^+(Y_i, Y_j) / q^-(Y_i, Y_j)] < c, \end{aligned} \tag{1}$$

где c – предельное значение так называемого индекса согласия, $c > 1$[1]. В упрощённом виде можно принять $c = 1{,}3$ [3].

В этом случае необходимо предположить, что исходному множеству векторных оценок соответствует не одно единственное бинарное отношение и, как следствие, не единственный орграф, но некоторое множество орграфов G''.

Очень важно отметить тот факт, что множество значений, которое может принимать любой весовой коэффициент важности критериев q_i, $i = 1, k$ – это все множество положительных чисел, то есть бесконечно. В то же время множество бинарных отношений для той или иной таблицы оценок, которое может быть построено в предположении, что q_i, $i = 1, k$ – любое число, большее ноля, – это всегда конечное множество для любого множества Y_i, $Y_j = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$, где n – конечное число.

Действительно, при всем бесконечном многообразии значений весовых коэффициентов, бинарное отношение, построенное на множестве из n векторных оценок, это всегда $n(n-1)/2$ неравенств вида (1), причем для каждой дроби Z_{ij} теоретически возможна любая из ситуаций вида:

$$\begin{cases} Z_{ij} \geq c \\ Z_{ij} \leq 1/c \\ 1/c \leq Z_{ij} < c \end{cases}.$$

Отсюда и получается значение максимально возможного количества бинарных отношений для произвольной таблицы оценок и n строк: $3^{n(n-1)/2}$ и, соответственно $|G| = 3^{n(n-1)/2}$, так как каждому бинарному отношению ставится в соответствие ориентированный граф.

Так как далеко не каждая таблица оценок порождает максимально возможное количество бинарных отношений, и, соответственно, множество орграфов G, то в общем случае для конкретной таблицы оценок можно построить множество $G'' \subset G$ [3].

Выявление ситуаций, позволяющих реализацию предлагаемого подхода

Проанализируем подробно причины, приводящие к такому результату, для чего введем следующую систему обозначений:

$$Z_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } Y_i > Y_j \\ 2, \text{ если } Y_i < Y_j \\ 3, \text{ если } Y_i \sim Y_j \end{cases}. \quad (2)$$

Предположим, что для той или иной таблицы оценок имеет место ситуация вида:

$$\frac{\overset{+}{q}_{i,j}}{\overset{-}{q}_{i,j}} \equiv \frac{\overset{+}{q}_{k,l}}{\overset{-}{q}_{k,l}} \equiv \cdots \equiv \frac{\overset{+}{q}_{s,t}}{\overset{-}{q}_{s,t}}. \quad (3)$$

что, кстати, действительно часто имеет место в практических задачах.

Подчеркнем, что здесь идет речь не о случайном совпадении арифметических значений выражений (3), обусловленном тем или иным набором $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$, а о тождестве алгебраических выражений вследствие результата сравнения соответствующих векторных оценок.

Тогда, соответственно:

$$Z_{ij} \equiv Z_{kl} \equiv \ldots. \equiv Z_{st}. \quad (4)$$

Последнее делает возможным представить все множество Z:

$$Z = \{Z_{12}, Z_{13}, \ldots, Z_{1n}, \ldots, Z_{(n-1)n}\}$$

разбиением вида

$$Z = Z^{(1)} + Z^{(2)} \ldots + Z^{(f)}, \quad (5)$$

где $Z^{(p)}{}_{p=1,f} = \{Z_{ij} \in \mathrm{Z} \mid \mathrm{Z} \equiv Z_{kl} \equiv \ldots \equiv Z_{st}\}$.

При этом, если для любой пары векторных оценок не имеет место тождество вида (4), то соответствующее $Z^{(p)}$ принимается $Z^{(p)} = Z_{ij}$.

Тогда, если для той или иной таблицы оценок имеет место тождество вида (4), то количество бинарных отношений, которое можно для нее построить при условии, что весовые коэффициенты важности критериев – это любые положительные числа, определится, как 3^f, где $f < r$, $r = n(n-1)/2$.

А поскольку для нас каждое бинарное отношение – это орграф, то и мощность множества G' определится теперь, как $|G'| = 3^f$.

Например, пусть для некоторой таблицы оценок $Y = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ имеет место ситуация вида $Z_{12} \equiv Z_{13}$, тогда множество Z представляется разбиением:

$$Z = Z^{(1)} + Z^{(2)},$$

где $Z^{(1)} = \{Z_{12}, Z_{13}\}$, $Z^{(2)} = Z_{23}$.

В терминах (2) все множество систем неравенств (бинарных отношений), соответствующих данной таблице оценок, можно представить, как:

$$\begin{cases} Z^{(1)} = 1 \\ Z^{(2)} = 1 \end{cases}; \begin{cases} Z^{(1)} = 1 \\ Z^{(2)} = 2 \end{cases}; \begin{cases} Z^{(1)} = 1 \\ Z^{(2)} = 3 \end{cases};$$
$$\begin{cases} Z^{(1)} = 2 \\ Z^{(2)} = 1 \end{cases}; \begin{cases} Z^{(1)} = 2 \\ Z^{(2)} = 2 \end{cases}; \begin{cases} Z^{(1)} = 2 \\ Z^{(2)} = 3 \end{cases};$$
$$\begin{cases} Z^{(1)} = 3 \\ Z^{(2)} = 1 \end{cases}; \begin{cases} Z^{(1)} = 3 \\ Z^{(2)} = 2 \end{cases}; \begin{cases} Z^{(1)} = 3 \\ Z^{(2)} = 3 \end{cases}.$$

И, соответственно, имеем $G' \subset G$, $|G| = 27$, $|G'| = 9$, то есть из двадцати семи в принципе возможных орграфов (для $n = 3$), в нашем случае существуют только девять ($f = 2$).

Отметим, что тождество вида (3) – не единственная причина уменьшения числа орграфов, существующих для той или иной таблицы оценок. Существование линейной зависимости между отдельными Z_{ij}, Z_{kl} приводит к аналогичному результату.

Все вышесказанное подводит к выводу о том, что для построения эффективной вычислительной процедуры, реализующей решение МКЗ методом последовательного сужения исходного множества векторных оценок, необходимо ответить на вопросы о численных оценках мощности множеств G', G'' для конкретной таблицы оценок и, самое основное, обосновать строгий критерий сужения указанного множества.

Собственно же вычислительный аппарат разрабатываемой процедуры является практическим результатом такого исследования.

Формулировка и доказательство базовых теорем

Как было сказано выше, наличие множества орграфов G', $G' \subset G$, определяется наличием в той или иной таблице оценок линейных зависимостей между Z_{ij}, Z_{kl}. Докажем теорему 1.

Теорема 1. Для любого $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$, наличие одной линейно зависимой пары Z_i, Z_j позволяет исключить 3^{x+1} бинарных отношений, как заведомо невозможных, где x – число Z, не связанных между собой линейной зависимостью.

Не анализируя подробно все случаи, когда линейная зависимость между какими-то Z_{ij}, Z_{kl} имеет место (такой анализ нужен уже непосредственно для построения вычислительной процедуры и будет приведен ниже), отметим, что последствия такой линейной зависимости всегда выражаются, как $Z_{ij} > Z_{kl}$ или $Z_{ij} < Z_{kl}$. А это позволяет предположить следующее: пусть для некоторой таблицы оценок имеет место ситуация вида $Z_{ij} > Z_{kl}$.

Тогда для данной таблицы оценок из всех комбинаций вида:

$$\begin{cases} Z_{ij}=1 \\ Z_{kl}=1 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=1 \\ Z_{kl}=2 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=1 \\ Z_{kl}=3 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=2 \\ Z_{kl}=1 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=2 \\ Z_{kl}=2 \end{cases};$$
$$\begin{cases} Z_{ij}=2 \\ Z_{kl}=3 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=3 \\ Z_{kl}=1 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=3 \\ Z_{kl}=2 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=3 \\ Z_{kl}=3 \end{cases},$$

возможны только:

$$\begin{gathered} \begin{cases} Z_{ij}=1 \\ Z_{kl}=1 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=1 \\ Z_{kl}=2 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=1 \\ Z_{kl}=3 \end{cases}; \\ \begin{cases} Z_{ij}=2 \\ Z_{kl}=2 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=3 \\ Z_{kl}=2 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=3 \\ Z_{kl}=3 \end{cases}. \end{gathered} \tag{6}$$

Аналогично, для ситуации вида $Z_{ij} < Z_{kl}$ возможными отношениями являются:

$$\begin{gathered} \begin{cases} Z_{ij}=1 \\ Z_{kl}=1 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=2 \\ Z_{kl}=1 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=2 \\ Z_{kl}=2 \end{cases}; \\ \begin{cases} Z_{ij}=2 \\ Z_{kl}=3 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=3 \\ Z_{kl}=1 \end{cases};\ \begin{cases} Z_{ij}=3 \\ Z_{kl}=3 \end{cases}. \end{gathered} \tag{7}$$

Введём следующие определения: пусть $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$, – множество векторных оценок. Тогда $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_r\}$ это множество дробей, $r = n(n-1)/2$, а W – это множество бинарных отношений, которые можно построить на множестве Y, при условии, что соответствующее множество Z не содержит тождества вида (3) и все компоненты множества Z линейно независимы между собой.

$$W = \{W_1, W_2, \ldots, W_S\}, \quad S = 3^r.$$

Тогда, соответственно, при наличии на множестве Z тождеств вида (3) для некоторой данной таблицы оценок $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$, имеем:

$$Z = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_f\};$$

$$W = \{W_1, W_2, \ldots, W_t\},\ t = 3^f, f < r.$$

Далее, пусть для некоторой таблицы оценок существуют пары Z_{ij}, Z_{kl} линейно зависимые между собой.

Например, пусть для $Y = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ выражения Z_1 и Z_2 являются линейно зависимыми, и пусть, для определенности, $Z_1 > Z_2$.

В сущности говоря, для $n = 3$ можно построить двадцать семь различных бинарных отношений:

$$1.\begin{cases} Z_1=1 \\ Z_2=1 \\ Z_3=1 \end{cases};\ 2.\begin{cases} Z_1=1 \\ Z_2=1 \\ Z_3=2 \end{cases};\ 3.\begin{cases} Z_1=1 \\ Z_2=1 \\ Z_3=3 \end{cases};\ 4.\begin{cases} Z_1=1 \\ Z_2=2 \\ Z_3=1 \end{cases};$$
$$5.\begin{cases} Z_1=1 \\ Z_2=2 \\ Z_3=2 \end{cases};\ 6.\begin{cases} Z_1=1 \\ Z_2=2 \\ Z_3=3 \end{cases};\ 7.\begin{cases} Z_1=1 \\ Z_2=3 \\ Z_3=1 \end{cases};\ 8.\begin{cases} Z_1=1 \\ Z_2=3 \\ Z_3=2 \end{cases};$$
$$9.\begin{cases} Z_1=1 \\ Z_2=3 \\ Z_3=3 \end{cases};\ 10.\begin{cases} Z_1=2 \\ Z_2=1 \\ Z_3=1 \end{cases};\ 11.\begin{cases} Z_1=2 \\ Z_2=1 \\ Z_3=2 \end{cases};\ 12.\begin{cases} Z_1=2 \\ Z_2=1 \\ Z_3=3 \end{cases};$$
$$13.\begin{cases} Z_1=2 \\ Z_2=2 \\ Z_3=1 \end{cases};\ 14.\begin{cases} Z_1=2 \\ Z_2=2 \\ Z_3=2 \end{cases};\ 15.\begin{cases} Z_1=2 \\ Z_2=2 \\ Z_3=3 \end{cases};\ 16.\begin{cases} Z_1=2 \\ Z_2=3 \\ Z_3=1 \end{cases};$$
$$17.\begin{cases} Z_1=2 \\ Z_2=3 \\ Z_3=2 \end{cases};\ 18.\begin{cases} Z_1=2 \\ Z_2=3 \\ Z_3=3 \end{cases};\ 19.\begin{cases} Z_1=3 \\ Z_2=1 \\ Z_3=1 \end{cases};\ 20.\begin{cases} Z_1=3 \\ Z_2=1 \\ Z_3=2 \end{cases};$$
$$21.\begin{cases} Z_1=3 \\ Z_2=1 \\ Z_3=3 \end{cases};\ 22.\begin{cases} Z_1=3 \\ Z_2=2 \\ Z_3=1 \end{cases};\ 23.\begin{cases} Z_1=3 \\ Z_2=2 \\ Z_3=2 \end{cases};\ 24.\begin{cases} Z_1=3 \\ Z_2=2 \\ Z_3=3 \end{cases};$$
$$25.\begin{cases} Z_1=3 \\ Z_2=3 \\ Z_3=1 \end{cases};\ 26.\begin{cases} Z_1=3 \\ Z_2=3 \\ Z_3=2 \end{cases};\ 27.\begin{cases} Z_1=3 \\ Z_2=3 \\ Z_3=3 \end{cases}.$$

В то же время, оговоренная здесь линейная зависимость вида $Z_1 > Z_2$ делает заведомо невозможными отношения:

$$10.\begin{cases} Z_1 = 2 \\ Z_2 = 1; \\ Z_3 = 1 \end{cases} \quad 11.\begin{cases} Z_1 = 2 \\ Z_2 = 1; \\ Z_3 = 2 \end{cases} \quad 12.\begin{cases} Z_1 = 2 \\ Z_2 = 1; \\ Z_3 = 3 \end{cases}$$

$$16.\begin{cases} Z_1 = 2 \\ Z_2 = 3; \\ Z_3 = 1 \end{cases} \quad 17.\begin{cases} Z_1 = 2 \\ Z_2 = 3; \\ Z_3 = 2 \end{cases} \quad 18.\begin{cases} Z_1 = 2 \\ Z_2 = 3; \\ Z_3 = 3 \end{cases}$$

$$19.\begin{cases} Z_1 = 3 \\ Z_2 = 1; \\ Z_3 = 1 \end{cases} \quad 20.\begin{cases} Z_1 = 3 \\ Z_2 = 1; \\ Z_3 = 2 \end{cases} \quad 21.\begin{cases} Z_1 = 3 \\ Z_2 = 1. \\ Z_3 = 3 \end{cases}$$

Последнее можно трактовать следующим образом, что пара линейно зависимых переменных (Z_1, Z_2) для случая $Z_1 > Z_2$ создает всего три «запретных» набора, а именно:

$$\begin{cases} Z_1 = 2 \\ Z_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} Z_1 = 2 \\ Z_2 = 3 \end{cases}; \begin{cases} Z_1 = 3 \\ Z_2 = 1 \end{cases},$$

причем число таких «запретных» наборов для каждой линейно зависимой пары не зависит от n, и всегда равно трем (в случае $Z_1 < Z_2$ было бы то же самое, это видно из соотношений (5)).

В то же время число «запрещенных» для данной таблицы оценок бинарных отношений, безусловно, напрямую связано с числом Z, не вошедших в линейно зависимые пары. Действительно, в рассматриваемом примере Z_3 не связана линейной зависимостью с Z_1 и Z_2 и на каждом из «запретных» наборов может принимать, соответственно, 3^1 (поскольку она одна) различных значений $Z_3 = 1$, $Z_3 = 2$, $Z_3 = 3$, а в силу того, что «запретных» наборов, в свою очередь, тоже три, то для данного примера общее число исключаемых из дальнейшего рассмотрения бинарных отношений, и, соответственно, орграфов, равно девяти ($3^2 = 9$).

Условимся в дальнейшем называть элементы множества Z, не связанные между собой линейной зависимостью, «свободными». Рассмотрим ситуацию, например, когда $Y = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$, и при этом, как и в предыдущем случае, $Z_1 > Z_2$. У нас, как и в предыдущем случае, будут иметь место три «запретных» набора:

$$\begin{cases} Z_1 = 2 \\ Z_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} Z_1 = 2 \\ Z_2 = 3 \end{cases}; \begin{cases} Z_1 = 3 \\ Z_2 = 1 \end{cases},$$

и для данного Y четыре свободных Z: Z_3, Z_4, Z_5, Z_6.

Соответственно, для каждого из «запретных» наборов можно построить 3^4 бинарных отношений, исключаемых в дальнейшем из рассмотрения, как несуществующих для данной таблицы оценок. И, естественно, всего таких отношений в данном случае будет 3^5.

Обобщая изложенное, можно считать доказанной теорему 1.

Теорема 2. Если для множества $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ существуют y линейно зависимых пар Z, то число невозможных (запрещенных) бинарных отношений для данной таблицы оценок определится, как:

$$3^{(x+y)}, \text{ где } x = n(n-1)/2 - 2y.$$

Прежде чем перейти к дальнейшим выкладкам, отметим, что ряд результатов, представленных в данном разделе работы в части оценки мощности множества бинарных отношений для таблиц векторных оценок, обладающих теми или иными особенностями, получен, как обобщение результатов, наглядно достигаемых на множествах $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$,

$$Y = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}.$$

Это не случайно. Множество $Y = \{Y_1, Y_2\}$ формально является, конечно, множеством, более чем из одной векторной оценки, то есть формально отвечает постановке дискретной многокритериальной задачи, где обязательно фигурируют несколько (множество) альтернатив, каждая из которых характеризуется оценкой по многим критериям (вектором). В то же время очевидно, что множество $Y = \{Y_1, Y_2\}$ – это своего рода «крайний случай» (для $Y = \{Y_1\}$ сама задача выбора теряет смысл) в ряде источников [3, 4, 5] можно найти подтверждение тому факту, что тот минимум альтернатив, для которого есть смысл рассматривать ту или иную методику решения, – это множество $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, которому соответствует множество векторных оценок $Y = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$. Последнее, по сути, является некоторой элементарной конструкцией, удобной, в силу небольшого числа элементов, но уже обладающей всеми свойствами, характерными для многокритериальной задачи в рассматриваемой здесь постановке.

В свою очередь, $Y = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ – следующий шаг от самой простой ситуации. В данном случае результат, проверенный на $Y = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$, верен для любого конечного n.

Продолжая анализ возможности уменьшения мощности множества W для той или иной таблицы оценок Y, рассмотрим случай, когда на множестве Z существует несколько (более одной) линейно зависимых пар.

Пусть, например, на множестве $Y = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$ имеет место $Z_1 > Z_2$, $Z_3 > Z_4$.

В этом случае, каждая такая пара, как было показано ранее, порождает по три «запретных» набора вида

$$\begin{cases} Z_1 = 2 \\ Z_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} Z_1 = 2 \\ Z_2 = 3 \end{cases}; \begin{cases} Z_1 = 3 \\ Z_2 = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} Z_3 = 2 \\ Z_4 = 1 \end{cases}; \begin{cases} Z_3 = 2 \\ Z_4 = 3 \end{cases}; \begin{cases} Z_3 = 3 \\ Z_4 = 1 \end{cases}.$$

Сочетаясь в различных комбинациях между собой, эти наборы породят, естественно, 3^2 «запретных» набора вида

$$\begin{cases} Z_1 = 2 \\ Z_1 = 2 \end{cases}; \begin{cases} Z_2 = 1 \\ Z_2 = 3 \end{cases}; \begin{cases} Z_3 = 2 \\ Z_3 = 1 \end{cases}; \begin{cases} Z_4 = 1 \\ Z_4 = 3 \end{cases} \text{ и т. п.}$$

В свою очередь, свободные переменные Z_5, Z_6 дают 3^2 наборов:

$$\begin{cases} Z_5 = 1 \\ Z_6 = 1 \end{cases} \ldots \begin{cases} Z_5 = 3 \\ Z_6 = 3 \end{cases}.$$

Очевидно, что для данного примера можно говорить о 3^4 наборах и соответственно бинарных отношениях (графах), невозможных для данной таблицы оценок.

Приведенное здесь построение инвариантно для любой аналогичной ситуации: y линейно зависимых пар могут сочетаться 3^y способами, а x свободных Z, сочетаясь между собой, дадут 3^x комбинаций.

Теорема 2 доказана.

Отметим сразу, что полученный результат верен только для случаев, когда линейная зависимость на множестве Z имеет место для пар вида $\{Z_i, Z_j\}$, $\{Z_k, Z_l\}$, … $\{Z_s, Z_t\}$, то есть для случаев вида:

$$\{Z_i, Z_j\} \cap \{Z_k, Z_l\} \cap \ldots \cap \{Z_s, Z_t\} = \varnothing.$$

Из приведенного выше материала видно, что попытка непосредственного построения множеств G и G' для реальных задач, где исходное число альтернатив (n) может исчисляться десятками, приводит к задаче слишком большой размерности: $|G| = 3^{n(n-1)/2}$. Как следствие, представляется целесообразным обосновать некий математический аппарат, позволяющий минимизировать количество вычислений, с этой целью докажем теорему 3.

Теорема 3. Пусть на множестве $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ построено множество $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_r\}$. Тогда любая l элементов этого множества ($l = 2, 3, \ldots, r$) сохраняет свои свойства, связанные с наличием внутри данной l тождеств вида $Z_i \equiv Z_k \equiv \ldots \equiv Z_s$ или линейных зависимостей вида $Z_i > Z_j$, $Z_i < Z_j$ независимо от элементов множества Z, не входящих в данную l.

То есть, если на множестве Z существует, например, пара $Z_i \equiv Z_k$, то из девяти потенциально возможных наборов (систем неравенств) для данной пары:

$$\begin{cases} Z_i = 1 \\ Z_k = 1 \end{cases}; \begin{cases} Z_i = 1 \\ Z_k = 2 \end{cases}; \begin{cases} Z_i = 1 \\ Z_k = 3 \end{cases}; \begin{cases} Z_i = 2 \\ Z_k = 1 \end{cases}; \begin{cases} Z_i = 2 \\ Z_k = 2 \end{cases};$$
$$\begin{cases} Z_i = 2 \\ Z_k = 3 \end{cases}; \begin{cases} Z_i = 3 \\ Z_k = 1 \end{cases}; \begin{cases} Z_i = 3 \\ Z_k = 2 \end{cases}; \begin{cases} Z_i = 3 \\ Z_k = 3 \end{cases}.$$

В число «запретных» наборов попадут:

$$\begin{cases} Z_i = 1 \\ Z_k = 2 \end{cases}; \begin{cases} Z_i = 1 \\ Z_k = 3 \end{cases}; \begin{cases} Z_i = 2 \\ Z_k = 1 \end{cases}; \begin{cases} Z_i = 2 \\ Z_k = 3 \end{cases}; \begin{cases} Z_i = 3 \\ Z_k = 1 \end{cases}; \begin{cases} Z_i = 3 \\ Z_k = 2 \end{cases}. \tag{8}$$

Причём это останется справедливым, если к данной паре добавить, например, Z_j. Более того, если рассмотреть теперь все множество $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_r\}$ и попытаться построить для него соответствующее множество W, то в последнем обязательно будут отсутствовать все системы неравенств, содержащие пары (8).

Аналогичная ситуация наблюдается и для случаев линейных зависимостей вида $Z_i > Z_j$, $Z_i < Z_j$.

Теорема 3 доказана.

Последнее делает возможным вывод, крайне важный для построения рациональной процедуры решения МКЗ по методике последовательного сужения, а именно, если на некотором множестве $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ построено соответствующее множество $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_r\}$ и проведен анализ на выявление как случаев вида $Z_i \equiv Z_k \equiv \ldots \equiv Z_s$, так и ситуаций вида $Z_i > Z_j$, $Z_i < Z_j$, то построение множества W'' можно вести поэтапно, построив возможный набор бинарных отношений сначала для пары Z_1 и Z_2, а затем для тройки Z_1, Z_2, Z_3 и т. д.

Причем каждый последующий этап таких построений будет учитывать результаты (запрещенные наборы) всех предыдущих, что весьма существенно снижает количество операций по построению множества W'', учитывая при этом (в отличие от существующей процедуры) линейные зависимости на множестве Z.

Далее представляется целесообразным доказать некоторые положения, в определенном смысле обобщающие все сказанное ранее относительно возможности поэтапного построения указанной вычислительной процедуры.

Итак, пусть задано некоторое $P(Y)$ и пусть V – множество всех возможных векторов вида $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$, существующих для данной таблицы оценок (здесь $q_1, q_2, \ldots, q_k$ – весовые коэффициенты важности критериев).

Из определения $q_1, q_2, \ldots, q_k$ очевидно, что множество V – континуально.

Если считать, что V и G'' – два класса объектов, и существует набор правил, ставящих каждому объекту Q класса V в соответствие некоторый объект g класса G'', то можно говорить об отображении класса V в классе G'': F: $V \to G''$, где F – функция аргумента Q с областью определения V и множеством значений, содержащихся в G''.

Для того чтобы в дальнейшем обоснованно оперировать аппаратом теории отображений, необходимо формально подтвердить корректность определения функции F: если в классах V и G'' даны определения равенства, отвечающие условиям:

– рефлексивности ($a = a$),

– симметричности

$$(a = b) \leftrightarrow (b = a), \tag{9}$$

– транзитивности $(a = b)$, $(b = c) \to (a = c)$, – то операция F определена корректно; если из $Q = Q'$ следует $g = g'$, где $g = F(Q)$ $g' = F(Q')$.

Рассмотрим вначале свойства отношения равенства на множестве V. Справедливость свойств (8) следует непосредственно из определения равенства векторов. Векторы $A = (a_1, a_2, \ldots, a_b)$ и $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ равны, если $m = n$ и $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_n = b_n$.

В свою очередь, отношением эквивалентности на графах является изоморфизм. Графы g и g' изоморфны, если между их множествами вершин существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность.

Очевидно, что для определенного указанным образом отношения изоморфизма справедливы свойства (9).

В то же время, из определения равенства векторов и правил (9) следует $Q = Q' \leftrightarrow g = g'$, – следовательно, функция F определена корректно.

Далее определим подмножество V^i, $V^i \subset V$, как подмножество векторов из V, образом которого на G'' является множество графов G':

$$F\colon V^i \to V^i,\ G^i{}_{i=1,n} = \{g \in G'' \mid Y_i \in K(g),\ Y_i \in P(Y)\},$$

то есть $G^i{}_{i = 1, n}$ – подмножество G'', состоящее из орграфов, в ядро которых входит i-я вершина.

Рассмотрим теперь содержательное значение такого определения V^i. Каждый вектор весовых коэффициентов важности критериев Q, $Q \in V$ – это, по сути, та или иная система предпочтений некоторого ЛПР. Тогда, в соответствии с определением, V^i – это множество всех тех систем предпочтений, для которых при решении МКЗ описываемым способом i-й вариант решения попадает в подмножество наилучших вариантов (следует заметить, что i-й вариант не означает «только i-й»).

Тогда, если на множестве V для некоторых i и j имеет место вложение вида $V^j \subset V^i$, то последнее надо понимать следующим образом: множество всех систем предпочтений, приводящих к выделению в число наилучших i-го варианта, полностью включает в себя такое же множество относительно j-го варианта решения МКЗ. Или: любая система предпочтений, приводящая к выбору i-го варианта, обязательно приводит и к выбору j-го варианта. Справедливо, очевидно, и следующее: если в числе наилучших выбран i-й вариант решения, то тем самым автоматически удовлетворены все требования множества систем предпочтений, приводящих к выбору j-го варианта.

Вышесказанное позволяет сделать следующий, крайне важный вывод, положенный в основу дальнейших рассуждений: в случае, если на множестве V имеет место вложение вида $V^j \subset V^i$, j-я векторная оценка (соответственно, j-я альтернатива) может быть исключена из рассмотрения.

Этот факт получает строгое доказательство и более наглядную интерпретацию, если от множества V перейти к множеству G''. Здесь следует подчеркнуть, что отображение F: $V \to G''$ является однозначным – каждому вектору Q, $Q \in V$ соответствует единственный орграф g, $g \in G''$, но не взаимно однозначным.

Действительно, рассмотрим любой произвольно выбранный граф g, $g \in G''$.

Как следует из вышеизложенного, наличие и ориентация дуг между любой парой вершин данного графа определяется выполнением систем неравенств вида (1), порождаемая вектором $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$.

Пусть теперь любая из компонент (например, q_s) вектора Q получила приращение Δq_s (любого знака):

$$Q' = (q_1, q_2, \ldots, (q_s + \Delta q_s), \ldots, q_k),$$

такой величины, что знаки неравенств системы вида (1) не изменились, то есть

$$F: Q' \to g.$$

Из вышесказанного очевидно, что любому графу $g \in G''$ соответствует множество векторов из V, причем множество мощности континуум.

Именно это отсутствие взаимной однозначности в отображении вида

$$F: V \to G''$$

делает неочевидным тот факт, что $V^j \subset V^i \to G^j \subset G^i$ и наоборот.

Теорема 4. Если на множестве V имеет место вложение вида $V^j \subset V^i$, то на множестве G'' выполняется $G^j \subset G^i$.

Из определения отображения F и множеств V^i, V^j имеем:

$$F: V^i \to G^i;$$

$$F: V^j \to G^j.$$

Предположим, что $G^j \notin G^i$, то есть существует орграф g^0, $g^0 \in G^j$, но $g^0 \notin G^i$. Из условия $V^j \subset V^i$ непосредственно следует, что все системы неравенств вида (1), генерируемые множеством векторов V^j, входят в множество систем неравенств, генерируемых V^i.

Следовательно, система неравенств, соответствующая орграфу g^0, также входит в множество аналогичных систем, генерируемых множеством V^i, то есть $g^0 \in G^i$, – противоречие.

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Если на множестве G'' выполняется условие $G^j \subset G^i$, то и на множестве V, соответственно, выполняется $V^j \subset V^i$.

Предположим, что $V^j \notin V^i$, то есть существует хотя бы один вектор Q^0, $Q^0 \in V^j$, но $Q^0 \notin V^i$. Образом Q^0 на множестве V является орграф g^0, $F: Q^0 \to g^0$, и по определению $g^0 \in G$.

Этот орграф соответствует определенной системе неравенств вида (1). В свою очередь, прообразом g^0 на множестве V является V^0:

$$F^{-1}: g^0 \to V^0,$$

где V^0 – континуальное множество, $V^0 \subset V$, состоящее из всех векторов, компоненты которых удовлетворяют системе неравенств вида (1), а последней соответствует орграф g^0. Очевидно, что $Q^0 \in V^0$.

В силу того, что имеет место $G^j \subset G^i$, система неравенств, соответствующая орграфу g^0, должна быть такой, чтобы в $K(g^0)$ входила бы, кроме j-й и i-я вершина тоже. То есть, для любого Q, $Q \in V^0$ (в том числе и для Q^0) его образом на множестве V является обязательно орграф из G^i. Следовательно, по определению множества $V^i, i = 1, n$, $Q^0 \in V^i$.

Теорема 5 доказана.

Итак, строго доказано, что $\boldsymbol{V^j \subset V^i \leftrightarrow G^j \subset G^i}$.

Этот факт имеет большое значение для всего хода дальнейших рассуждений, так как позволяет обоснованно проводить все дальнейшие построения, касающиеся непосредственно цели настоящей работы, требуемой вычислительной процедуры, на множестве G'' и соответствующих бинарных отношениях.

Далее, непосредственно из доказанного получаем определенные следствия.

Следствие 1. Если на множестве G'' для некоторых i, j имеет место вложение вида $G^j \subset G^i$, то векторная оценка Y^j (j-й вариант решения) должна быть исключена из рассмотрения.

Действительно, рассмотрим эту ситуацию применительно к множеству G'': здесь все орграфы, в ядро которых входит j-я вершина, обязательно содержат в ядре и i-ю вершину тоже (но не наоборот). То есть не существует такой системы предпочтений (вектора $Q \in V$), отображением которого на множестве G'' являлся бы граф, в ядро которого входила бы i-я вершина, но не входила бы j-я. Что и требовалось доказать.

В свою очередь, из последнего получаем достаточно очевидное следствие 2.

Следствие 2. Если на множестве G'' имеет место вложение $G^j \subset G^i$, то на множестве G'' не существует орграфов, в ядро которых входила бы только j-я вершина.

Все вышесказанное позволяет сформулировать некоторый общий принцип сужения множества $P(Y)$ для МКЗ рассматриваемого типа.

Пусть задано $P(Y)$, для которого определены G'', G^i, $i = 1, n$. Сужение $P(Y)$ может быть проведено за счет исключения из дальнейшего рассмотрения подмножества $A(Y)$, $A(Y)$, $\subset P(Y)$, $A(Y) = \{Y^j, Y^j \in P(Y) \mid G \subset G^i, i \neq j\}$.

Доказанный выше факт взаимного соответствия вида $V^j \subset V^i \leftrightarrow G^j \subset G^i$ позволяет ответить и на некоторые частные, но достаточно важные вопросы, связанные со структурой множества G''.

А именно, сформулированный ранее критерий удаления той или иной векторной оценки из исходного множества $P(Y)$ звучал как: удаляются векторные оценки, ни разу не вошедшие в ядро того или иного орграфа на множестве G'' [2].

В то же время, с формальной точки зрения таких векторных оценок, строго говоря, не существует, поскольку существует орграф определенный, как граф без связей, то есть орграф, в ядро которого входят все его вершины. Более того, можно показать [4], что на любом множестве G'' всегда существует граф без связей g^*.

Как следствие, при использовании в ходе решения МКЗ методики последовательного сужения, приходилось делать оговорку, в плане того, что граф без связей – это скорее некоторое исключение, предельный случай и т. п.

В определенном смысле это так и есть. Полное отсутствие связей в орграфе, соответствующем тому или иному бинарному отношению на множестве Y – действительно некоторый «отдельный случай». Теперь же, формулируя критерий исключения векторной оценки на множестве $P(Y)$ как: если на множестве G'' для некоторых i, j имеет место вложение вида $G^j \subset G^i$, то векторная оценка Y_j (j-ый вариант решения) должна быть исключена из рассмотрения, – можно этой оговорки не делать, а исключать j-ю векторную оценку, не взирая на наличие графа g^* на множестве G''.

Вывод

Таким образом, на основе представленного математического аппарата существует возможность построения вычислительной процедуры решения МКЗ по методике последовательного сужения исходного множества векторных оценок с существенным уменьшением объёма вычислительных процедур.

Применение данного метода в управлении электротехнической системой водоснабжения позволит находить оптимальные режимы работы при минимальном участии ЛПР.

Литература

1. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений : учебник / О. И. Ларичев. – Изд. 2-ое, перераб. и доп. – Москва : Логос, 2002. – 392 с. : ил.
2. Метод равнозначных критериев и его применение для выбора конструкции дугогасительного устройства / Б. Н. Лобов, С. Л. Белокопытов, Р. А. Ким // Известия ВУЗОВ. Северо-кавказский регион. Технические науки. – 2004. – № 1. – С. 32 – 36.
3. Сужение множества Парето-оптимальных решений с помощью безусловного критерия в задачах векторной оптимизации / С. Л. Белокопытов // Изв. СКНЦ ВШ. Техн. науки. – 1988. – № 1. – С. 48 – 51.
4. Подиновский В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 256 с.
5. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход / В. Д. Ногин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 176 с.

Поступила в редакцию 12.10.2020

***Роман Борисович Лобов**, аспирант, e-mail: lobov_roman@mail.ru, т. +7 (904) 508-26-92.*
(Ростовский государственный университет путей сообщения (ФГБОУ ВО РГУПС)).

MODERNIZATION OF THE METHOD OF SEQUENTIAL NARROWING OF THE ORIGINAL SET OF VECTOR ESTIMATES

R. B. Lobov

The article presents the mathematical apparatus of the PSIMVO method, which Allows solving multi-criteria problems. Within the framework of the method, definitions and proofs of theorems and corollaries are considered that allow to justify the PSIMVO method. The advantage of this method is to minimize the participation of the decision-maker. It also significantly reduces the amount of computational procedures compared to other similar methods.
***Keywords:** Method PSIMVO, the solution of multicriteria problems, binary relations, narrowing the initial set.*

References

1. Larichev O. I. Theory and methods of decision making : textbook / O. I. Larichev. – 2nd edition, revised and enlarged. – Moscow : Logos, 2002. – 392 p. : with figures.
2. Method of equivalent criteria and its application for selection of arc-suppression device design / B. N. Lobov, S. L. Belokopytov, R. A. Kim // University News. North Caucasian Region. Technical Sciences. – 2004. – No. 1. – Pp. 32 – 36.

3. Contraction of a set of Pareto-optimal decisions with the help of an unconditional criterion in vector optimization problems / S. L. Belokopytov // News of the North-Caucasian Scientific Center of Higher Education. Technical Sciences. – 1988. – No. 1. – Pp. 48 – 51.
4. Podinovskii V. V. Pareto-optimal solutions of multi-criteria problems / V. V. Podinovskii, V. D. Nogin. – Moscow : Nauka (Science). Main editorial board of the physico-mathematical literature, 1982. – 256 p.
5. Nogin V. D. Decision making in multi-criteria environment: quantitative approach / V. D. Nogin. – 2nd edition, revised and enlarged. – Moscow : FIZMATLIT, 2004. – 176 p.

Roman Borisovich Lobov*, postgraduate, e-mail: lobov_roman@mail.ru, +7 (904) 508-26-92.*
(Rostov State Transport University).