

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ИЗБЫТОЧНЫХ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ

В настоящее время ставится задача повышения ресурса космических аппаратов и их систем. Повышение ресурса маховичных систем может быть достигнуто за счет установки на борту дополнительного числа двигателей-маховиков и отказа от традиционной схемы установки двигателей-маховиков параллельно осям космического аппарата.

Введение избыточности в маховичную систему, а также использование в контуре управления бортовой ЦВМ, позволяет ставить и решать различные оптимизационные задачи. Например можно регулировать кинетические моменты исполнительных органов, что способствует повышению ресурса двигателей-маховиков и маховичной системы в целом [1], минимизировать потребление маховичной системы с учётом свойства рекуперации электроэнергии двигателей-маховиков, тестировать двигатели-маховики в процессе штатной работы системы ориентации.

1. Установочные векторы. Первая проблема, возникающая при проектировании избыточной маховичной системы, связана с выбором числа и схемы установки двигателей-маховиков на космическом аппарате [1, 2].

Рассмотрим избыточную маховичную систему, в состав которой входят $n > 3$ одинаковых двигателей-маховиков с максимальным кинетическим моментом H_* . Пусть $Oxyz$ – связанная система координат, относительно которой определяется схема установки двигателей-маховиков. Обозначим через \mathbf{h}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – единичный вектор, параллельный оси вращения i -го маховика. За начало всех векторов \mathbf{h}_i выберем точку O . Совокупность векторов \mathbf{h}_i определяет схему установки двигателей-маховиков на космическом аппарате.

Положение установочного вектора \mathbf{h}_i в системе координат $Oxyz$ может быть задано тремя направляющими косинусами h_{i1}, h_{i2}, h_{i3} или двумя углами α_i, β_i (рис. 1,а), которые вводятся следующим образом. Пусть вначале все векторы совпадают с направлением оси Ox . Вектор \mathbf{h}_i можно перевести в новое положение двумя поворотами. Первый поворот на угол α_i осуществляется вокруг оси Oz . Второй поворот на угол β_i производится вокруг оси Ox , при этом

вектор перемещается по поверхности конуса. Установочные углы α_i и β_i подлежат определению.

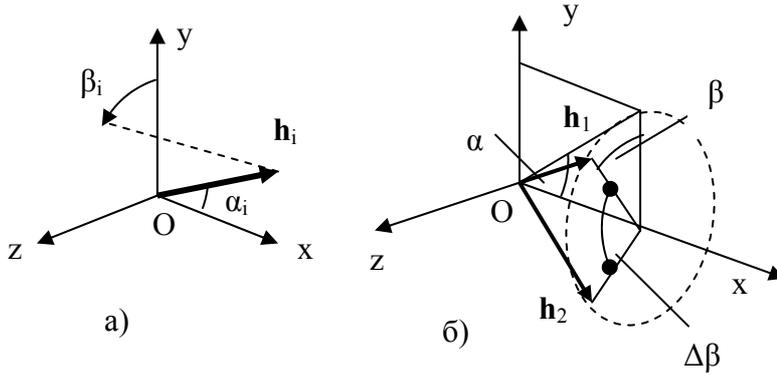


Рис. 1. Установочные векторы (а) и установочный конус (б)

Направляющие косинусы и углы α_i, β_i связаны соотношениями

$$h_{i1} = \cos \alpha_i, \quad h_{i2} = \sin \alpha_i \cos \beta_i, \quad h_{i3} = \sin \alpha_i \sin \beta_i. \quad (1)$$

Проекции вектора кинетического момента i -го двигателя-маховика $\mathbf{H}_i = H_i \mathbf{h}_i$ на оси $Oxyz$ составляют

$$H_{i1} = H_i \cos \alpha_i, \quad H_{i2} = H_i \sin \alpha_i \cos \beta_i, \quad H_{i3} = H_i \sin \alpha_i \sin \beta_i,$$

где кинетический момент двигателя-маховика H_i считается положительным, если направления векторов \mathbf{h}_i и \mathbf{H}_i совпадают, и отрицательным, если они противоположны.

2. Область S маховичной системы. В результате изменения кинетических моментов всех двигателей-маховиков в диапазоне

$$-H_* \leq H_i \leq H_* \quad (2)$$

образуется область S изменения вектора кинетического момента маховичной системы, под которой понимается геометрическое место возможных положений вектора

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i = \sum_{i=1}^n H_i \mathbf{h}_i. \quad (3)$$

Форма области S зависит от схемы установки двигателей-маховиков, а ее размеры пропорциональны максимальному кинетическому моменту двигателя-маховика H_* . Размеры и форма тре-

буемой области S^* определяются тактико-техническими требованиями к динамике стабилизации и поворотов космического аппарата. Выбором схемы установки и H_* должно обеспечиваться условие $S^* \in S$.

Избыточные системы сохраняют управляемость при выходе из строя от одного до $n-3$ двигателей-маховиков, если остаются исправными любые три двигателя-маховика, у которых установочные векторы некопланарны, т.е.

$$(\mathbf{h}_i \times \mathbf{h}_j) \mathbf{h}_k \neq 0. \quad (4)$$

Двигатели-маховики относятся к устройствам, обладающим высокой надежностью, что подтвердили многочисленные летные испытания. Поэтому в избыточных системах достаточно использовать дополнительно 1-3 двигателя-маховика.

С учетом (4) дополнительные двигатели-маховики необходимо ставить под углом к основным двигателям-маховикам или выбирать схему установки избыточной системы, руководствуясь требованиями к области S .

Кинетический момент одного двигателя-маховика меняется внутри отрезка длиной $2H_*$, параллельного установочному вектору. Вектор кинетического момента системы двух произвольных двигателей-маховиков с индексами i и j может изменяться внутри ромба с длиной стороны $2H_*$ и углом при вершине

$$\gamma_{ij} = \arccos(\mathbf{h}_i \times \mathbf{h}_j). \quad (5)$$

Стороны ромба параллельны установочным векторам \mathbf{h}_i и \mathbf{h}_j .

При ограничениях вида (2) и соблюдении условий (4) область S избыточной системы $n > 3$ одинаковых двигателей-маховиков представляет собой выпуклый многогранник. Число его граней в форме ромбов с длиной стороны $2H_*$ составляет $2C_n^2 = n(n-1)$ [3, 4].

Объем области S складывается из объема $n(n-1)$ пирамид, у которых основаниями являются грани-ромбы, а высоты равны расстояниям от центра O до плоскости ромба.

Вычислим расстояние $r_{v\mu}$ от центра O до произвольной грани, параллельной установочным векторам \mathbf{h}_v и \mathbf{h}_μ . Единичный вектор, нормальный к грани, определяется по формуле

$$\mathbf{e}_{v\mu} = \frac{\mathbf{h}_v \times \mathbf{h}_\mu}{|\mathbf{h}_v \times \mathbf{h}_\mu|}. \quad (6)$$

Спроектируем произвольный вектор \mathbf{H}_i на вектор $\mathbf{e}_{v\mu}$

$$H_{ie} = \mathbf{H}_i \times \mathbf{e}_{v\mu} = H_i \mathbf{h}_i \times \mathbf{e}_{v\mu} .$$

Максимум проекции H_{ie} обеспечивается выбором $H_i = H_* \text{sign}(\mathbf{h}_i \times \mathbf{e}_{v\mu})$.

Расстояние $r_{v\mu}$ определяется как сумма максимальных проекций всех векторов на направление $\mathbf{e}_{v\mu}$

$$r_{v\mu} = H_* \sum_{i=1}^n | \mathbf{h}_i \times \mathbf{e}_{v\mu} | .$$

С учетом (6) получим

$$r_{v\mu} = \frac{H_*}{| \mathbf{h}_v \times \mathbf{h}_\mu |} \sum_{i=1}^n | (\mathbf{h}_v \times \mathbf{h}_\mu) \mathbf{h}_i | . \quad (7)$$

Отметим, что в силу выпуклости многогранника минимальный член множества $r_{v\mu}$ определяет радиус сферы r , вписанной в область S ,

$$r = \min_{v\mu} r_{v\mu} .$$

Величина r определяет гарантированный кинетический момент, создаваемый маховичной системой независимо от направления.

Объем пирамиды

$$V_{v\mu} = 1/3 S_{v\mu} r_{v\mu} ,$$

построенной на грани, параллельной установочным векторам \mathbf{h}_v и \mathbf{h}_μ , площадью $S_{v\mu} = 4 H_*^2 | \mathbf{h}_v \times \mathbf{h}_\mu |$ вычисляется после подстановки (7) по формуле

$$V_{v\mu} = 4/3 H_*^3 \sum_{i=1}^n | (\mathbf{h}_v \times \mathbf{h}_\mu) \mathbf{h}_i | .$$

Суммирование объёмов $n(n-1)$ пирамид дает объём области S

$$V = 2/3 H_*^3 \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n \sum_{i=1}^n | (\mathbf{h}_v \times \mathbf{h}_\mu) \mathbf{h}_i | . \quad (8)$$

При сравнении различных маховичных систем, удовлетворяющих одним и тем же техническим требованиям, предпочтение следует отдавать системам, обеспечивающим максимальный объём области S . Другим критерием для сравнения является радиус вписанной сферы r . По этим же показателям можно судить об относительном ухудшении свойств системы при выходе из строя отдельных двигателей-маховиков.

Повышению ресурса маховичной системы способствует равномерное распределение общего кинетического момента между отдельными двигателями-маховиками. С этой целью векторы \mathbf{h}_i следует равномерно распределять и ориентировать по правильной круговой конической поверхности или боковым рёбрам правильных пирамид [1, 2]. Если ось конической поверхности совместить с осью Ox , то установочные углы α_i всех векторов \mathbf{h}_i окажутся одинаковыми и равными углу α между образующей конуса и осью Ox .

Направляющие косинусы (1) и угол α связаны соотношениями

$$h_{i1} = \cos \alpha, h_{i2} = \sin \alpha \cos \beta_i, h_{i3} = \sin \alpha \sin \beta_i. \quad (9)$$

Проекции вектора кинетического момента маховичной системы \mathbf{H} (3) на оси $Oxyz$ вычисляются по формулам

$$H_x = \cos \alpha \sum_{i=1}^n H_i, \quad H_y = \sin \alpha \sum_{i=1}^n H_i \cos \beta_i, \\ H_z = \sin \alpha \sum_{i=1}^n H_i \sin \beta_i.$$

Установочные углы β_i отличаются друг от друга на угол $\Delta\beta=2\pi/n$, т.е.

$$\beta_{i+1} = \beta_i + \Delta\beta, \quad \beta_1 = \beta < \Delta\beta.$$

Если представить, что установочные векторы \mathbf{h}_i «закреплены» на поверхности конуса (рис. 1,б), то установочный угол β задаёт ориентацию конуса относительно осей космического аппарата и определяет начало отсчёта углов β_i :

$$\beta_i = \beta + (i-1) \Delta\beta. \quad (10)$$

Дадим общую характеристику ромбов, образующих поверхность области S изменения вектора кинетического момента системы.

Углы ромбов (5) после подстановки направляющих косинусов (9) определяются соотношением

$$\gamma_{ij} = \arccos[\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos(\beta_j - \beta_i)].$$

Поскольку углы ромбов зависят от угла $\Delta\beta$ и разности индексов, введём обозначение $k=j-i$. Тогда

$$\gamma_k = \gamma_{ij} = \arccos(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos k \Delta\beta).$$

Полученные соотношения преобразуются к виду

$$\gamma_k = 2 \arcsin[\sin \alpha \sin (k \Delta\beta / 2)].$$

Минимальный угол, соответствующий $k=1$,

$$\gamma_l = \gamma_{i,i+1} = 2\arcsin[\sin\alpha \sin(\Delta\beta/2)] < 2\pi/n$$

образуют соседние векторы, максимальный – наиболее удаленные, для которых $k = 1/2n$, если число n чётное, и $k = 1/2(n-1)$, если число n нечётное.

Характерно, что для любых чётных чисел n (даже при $n \rightarrow \infty$) максимальные углы ромбов одинаковы и равны 2α . Минимальный угол γ_1 стремится к нулю при бесконечном увеличении числа n .

Число разнотипных ромбов, образующих поверхность области S , при чётном числе двигателей-маховиков равно $1/2 n$, при нечётном $1/2(n-1)$.

При чётном n число одинаковых ромбов с углом γ_k равно $2n$ для каждого индекса $k = 1, 2, \dots, 1/2 n-1$, число одинаковых ромбов с максимальным углом 2α ($k = 1/2 n$) равно n . При нечётном n число одинаковых ромбов с углом γ_k равно $2n$ для каждого индекса $k = 1, 2, \dots, 1/2(n-1)$.

Перейдем к вычислению объёма области S .

С учетом принятой схемы установки и соотношений (9) слагаемые, входящие в формулу (8) для вычисления объёма области S , примут вид

$$(\mathbf{h}_v \times \mathbf{h}_\mu)\mathbf{h}_i = [\sin(\beta_i - \beta_\mu) + \sin(\beta_v - \beta_i) + \sin(\beta_\mu - \beta_v)] \sin^2\alpha \cos\alpha. \quad (11)$$

Подстановка (10) в (11) позволяет представить векторно-скалярные произведения установочных векторов как функции угла $\Delta\beta$:

$$(\mathbf{h}_v \times \mathbf{h}_\mu)\mathbf{h}_i = [\sin(i-\mu)\Delta\beta + \sin(v-i)\Delta\beta + \sin(\mu-v)\Delta\beta] \sin^2\alpha \cos\alpha. \quad (12)$$

Все слагаемые вида (12), образующие объём области S (8), имеют общий множитель

$$V_2(\alpha) = \sin^2\alpha \cos\alpha,$$

который вынесем за знак суммирования.

Объём области S (8) можно представить в виде произведения двух функций

$$V = 4/3 H_*^3 V_1(2\pi/n) V_2(\alpha). \quad (13)$$

Функция V_1 зависит только от угла $\Delta\beta$, т.е. от числа n двигателей-маховиков, и не зависит от угла α , функция V_2 зависит только от угла α и не зависит от числа n двигателей-маховиков.

Определим угол конуса α_* , обеспечивающий максимум объёма области S . Для этого приравняем нулю частную производную

$$\partial V_2(\alpha)/\partial\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha.$$

Максимум функции $V_2^* = \max_{\alpha} V_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ обеспечивает угол конуса $\alpha_* = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$ ($\alpha_* \approx 54^\circ 44'$).

Зависимость функции V_2/V_2^* от угла α изображена на рис. 2. Видно, что функция $V_2(\alpha)$ имеет пологий максимум. При изменении угла конуса в диапазоне от 45° до 65° объём области S отличается от максимального не более, чем на 10%. Это обстоятельство позволяет выбором установочных углов β и α обеспечивать равенство максимальных кинетических моментов по осям ориентации без значительного снижения объёма области S .

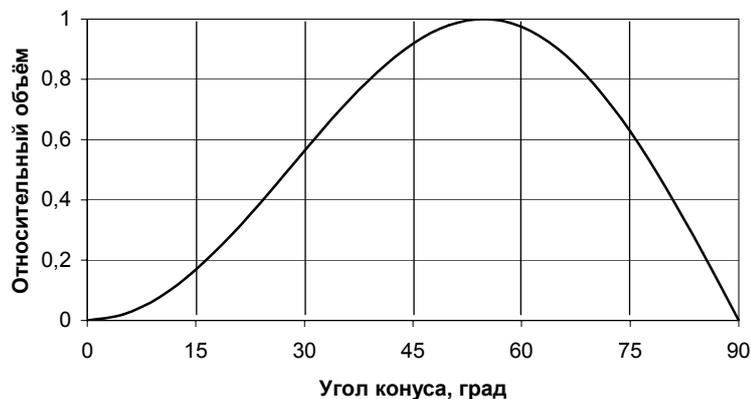


Рис. 2. Зависимость объёма области S от угла α

Поскольку функция V_2 одинакова для всех избыточных систем, отношение объёмов областей S разных систем будет определяться отношением функций V_1 .

3. Маховичные системы с избыточностью от одного до трёх двигателей-маховиков. Установочный конус с числом двигателей-маховиков от трёх до шести изображён на рис. 3 в виде проекции на плоскость Oyz .

Для полноты картины начнем с традиционной системы, в которой $n=3$ и $\Delta\beta = 2\pi/3$ (рис. 3,а). Область S системы трех двигателей-маховиков представляет собой куб с длиной стороны $2H_*$. Ориентация куба относительно оси Ox зависит от угла β . Область S при $\beta = 0^\circ$ изображена на рис. 4,а. Сравнивая объём куба $V = 8H_*^3$ с объёмом (13) при $\alpha = \alpha_*$, получим $V_1 = 9\sqrt{3} \approx 15,59$. Радиус сферы, вписанной в куб, равен H_* .

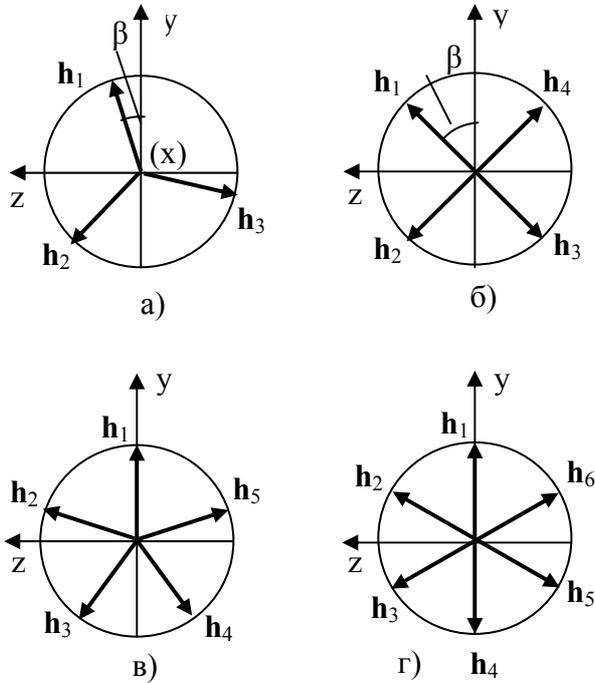


Рис. 3. Схемы установки двигателей-маховиков при n :
 а) - 3; б) - 4; в) - 5; г) - 6

Естественно, что система теряет управляемость при выходе из строя любого двигателя-маховика.

Максимальные значения кинетических моментов, создаваемые маховичной системой по осям $Oxyz$, составят

$$H_x^* = 3H_* \cos \alpha_*, H_y^* = H_* \sin \alpha_* (\frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \beta + 1,5 \cos \beta),$$

$$H_z^* = \sqrt{3} H_* \sin \alpha_* \cos \beta.$$

Если $\beta = 0^\circ$, то $H_x^* = \sqrt{3} H_* \approx 1,73 H_*$, $H_y^* = 1,5 H_* \sin \alpha_* \approx 1,22 H_*$,

$$H_z^* = \sqrt{3} H_* \sin \alpha_* \approx 1,41 H_*.$$

Выбор установочного угла $\beta = \arctg(2 - \sqrt{3}) = 15^\circ$ обеспечивает равенство максимальных кинетических моментов по осям Oy и Oz

$$H_y^* = H_z^* \approx 1,366 H_*.$$

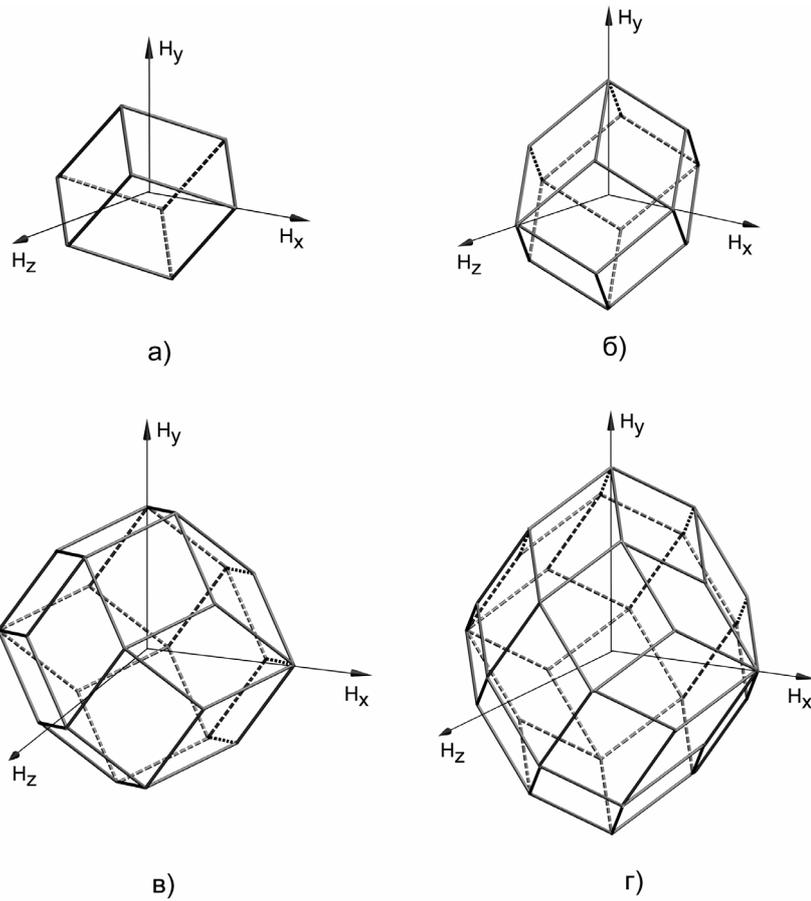


Рис. 4. Области S систем двигателей-маховиков при n
a) - 3; б) - 4; в) - 5; г) - 6

Выбор установочных углов $\beta = 15^\circ$ и $\alpha = \arctg(\sqrt{3} / \cos\beta) \approx 60, 81^\circ$ обеспечивает равенство максимальных кинетических моментов по всем осям ориентации $H_x^* = H_y^* = H_z^* \approx 1,46H_*$.

Система с $n=4$ ($\Delta\beta=\pi/2$) двигателями-маховиками является минимально избыточной (рис. 3,б) [1]. Её область S представляет собой двенадцатигранник, имеющий 14 вершин, 24 ребра, осевую и центральную симметрию.

Максимальные значения кинетических моментов, создаваемые маховичной системой по осям $Oxyz$, составят

$$H_x^* = 4 H_* \cos \alpha, H_y^* = H_z^* = 2 H_* \sin \alpha (\sin \beta + \cos \beta).$$

Выбор $\beta = \pi/4$ и $\alpha = \alpha_* = \arctg \sqrt{2}$ обеспечивает равенство максимальных кинетических моментов (${}^{4/3} \sqrt{3} H_* \approx 2,31 H_*$) по трем осям $Oxyz$.

Поверхность области S состоит из восьми ромбов с углом $\gamma_1 = \gamma_{i,i+1} = \arccos(\cos^2 \alpha)$ и четырёх ромбов с углом $\gamma_2 = \gamma_{i,i+2} = 2\alpha$. При $\alpha = \alpha_*$ угол первого ромба равен дополнительному углу второго ромба ($\gamma_1 = \pi - 2\alpha_*$) и все ромбы будут одинаковыми. Ромбододекаэдр (рис. 4,б), составленный из 12 одинаковых ромбов, не относится к правильным многогранникам, поскольку в его вершинах сходится разное число граней: в 8 вершинах сходятся по три грани, а в 6 вершинах – по четыре.

Объёмы пирамид, построенных на ромбах первого и второго типа, одинаковы; общее число пирамид равно 12. Объём ромбододекаэдра составляет

$$V = 64 H_*^3 V_2 = \frac{128}{3\sqrt{3}} H_*^3 \approx 24,63 H_*^3.$$

Для системы с $n=4$ двигателями-маховиками $V_1 = 48$.

Радиус описанной сферы совпадает с максимальными кинетическими моментами по координатным осям $R = {}^{4/3} \sqrt{3} H_* \approx 2,31 H_*$.

Радиус сферы, вписанной в ромбододекаэдр, равен высоте пирамиды

$$r = 2\sqrt{\frac{2}{3}} H_* \approx 1,63 H_*.$$

При отказе одного двигателя-маховика область S вырождается в параллелепипед объёмом

$$V = \frac{32}{3\sqrt{3}} H_*^3 \approx 6,16 H_*^3$$

и радиусом вписанной сферы

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} H_* \approx 0,815 H_*.$$

Сравним рассмотренную систему « $n=4$ » с традиционной системой двигателей-маховиков, в которую добавлен четвертый двигатель-маховик. Ось вращения дополнительного маховика параллельна биссектрисе трёхгранного угла, образованного осями вращения маховиков традиционной системы, т.е. параллельна оси конуса.

Область S системы « $3+1$ » имеет вид двенадцатигранника, поверхность которого ограничена шестью квадратами и шестью ромбами с углом α_* при вершине. По объёму области S

$$V = 8(1 + \sqrt{3})H_*^3 \approx 21,8H_*^3$$

и радиусу вписанной сферы

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} H_* \approx 1,16H_*$$

система «3+1» уступает предыдущей системе. Преимущество системы «n=4» по сравнению с системой «3+1» возрастает при отказах. При отказе любого из основных двигателей-маховиков область S системы «3+1» вырождается в параллелепипед с объёмом

$$V = 8/\sqrt{3} H_*^3 \approx 4,62H_*^3$$

и радиусом вписанной сферы

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}} H_* \approx 0,58H_*$$

После отказа по одному двигателю-маховику объём области S системы «3+1» составляет 75% от объёма области S системы «n=4», а радиус вписанной сферы в $\sqrt{2}$ раз меньше.

Известна минимально избыточная система, в которой дополнительный (четвертый) двигатель-маховик h_4 , установленный под равными углами к остальным двигателям-маховикам, включается в работу только при отказе любого двигателя-маховика в основных каналах. В штатном режиме и при отказах работают по три двигателя-маховика. Такая система значительно проигрывает двум предыдущим системам по объёму области S в штатном режиме.

Перейдём к системе с $n=5$, полагая $\beta=0^\circ$ и $\Delta\beta=2\pi/5=72^\circ$ (рис.3,е). Для характеристики управляющих свойств системы воспользуемся общими формулами, полученными в разделе 2 для избыточной системы произвольного вида. Область S системы пяти одинаковых двигателей-маховиков представляет собой выпуклый двадцатигранник (рис. 4,е). Его гранями являются ромбы с углами при вершинах

$$\gamma_1 = \arccos(\cos^2\alpha_* + \sin^2\alpha_* \cos 72^\circ) \approx 57,36^\circ,$$

$$\gamma_2 = \arccos(\cos^2\alpha_* + \sin^2\alpha_* \cos 144^\circ) \approx 101,9^\circ.$$

Объём области S складывается из объёмов 10 пирамид, построенных на ромбах первого типа, и объёмов 10 пирамид, построенных на ромбах второго типа,

$$V = \frac{40}{3} H_*^3 (10 \sin 72^\circ + 3 \sin 36^\circ) V_2 \approx 57,86H_*^3,$$

при этом $V_1 \approx 150,3$.

Максимальные значения кинетических моментов, создаваемые

маховичной системой по осям $Oxyz$, а также радиусы описанной и вписанной сфер, составят

$$H_x^* = 5H_* \cos \alpha_* \approx 2,89H_*, H_y^* = H_* \sin \alpha_* (1 + \cos 72^\circ + 2 \cos 36^\circ) \approx 2,39H_*, \\ H_z^* = 2H_* \sin \alpha_* (\cos 18^\circ + \cos 54^\circ) \approx 2,51H_*, R \approx 2,89H_*, r \approx 2,17H_*.$$

Продолжим ряд избыточных систем до $n=6$, полагая $\beta=0^\circ$ и $\Delta\beta=60^\circ$ (рис. 3,2). Область S системы шести одинаковых двигателей-маховиков представляет собой выпуклый тридцатигранник (рис. 4,2). Его гранями являются ромбы с углами при вершинах $\gamma_1 \approx 48,2^\circ$, $\gamma_2 = 90^\circ$, $\gamma_3 = 2\alpha_* \approx 109,5^\circ$.

Объём области S складывается из объёмов 12 пирамид, построенных на ромбах первого типа, 12 пирамид, построенных на ромбах второго типа, и 6 пирамид, построенных на ромбах третьего типа,

$$V = 144 \sqrt{3} H_*^3 V_2 = 96H_*^3,$$

при этом $V_1 = 108 \sqrt{3} \approx 186,8$.

Максимальные значения кинетических моментов, создаваемые маховичной системой по осям $Oxyz$, а также радиусы описанной и вписанной сфер, составят

$$H_x^* = 6H_* \cos \alpha_* \approx 3,46H_*, H_y^* = 4H_* \sin \alpha_* \approx 3,27H_*, \\ H_z^* = 2 \sqrt{3} H_* \sin \alpha_* \approx 2,83H_*, R = 6H_* \cos \alpha_* \approx 3,46 H_*, \\ r = \sqrt[8]{3} H_* \approx 2,67H_*.$$

При отказах одного, двух или трёх двигателей-маховиков область S вырождается соответственно в двадцатигранник, двенадцатигранник и параллелепипед. Их размеры и объёмы можно рассчитать по формулам из раздела 2.

Соотношение $(R - r)/r$ характеризует «несферичность» области S [5]. Чем меньше эта величина, тем больше форма области S приближается к сфере. «Несферичность» уменьшается с повышением степени избыточности системы. Если для системы трех маховиков эта величина составляет 0,73, то для систем четырех, пяти и шести маховиков она уменьшается соответственно до 0,41; 0,33 и 0,3.

Отметим важное свойство области S . Каждой совокупности векторов \mathbf{H}_i , $|\mathbf{H}_i| < H_*$ соответствует одна точка s , определяемая вектором (3) и расположенная внутри области S . Для избыточных систем ($n > 3$) обратное утверждение неверно: каждой точке s соответствует множество векторов \mathbf{H}_i , которые удовлетворяют равенству (3). Это означает, что в избыточных системах один и тот же вектор кинетического момента \mathbf{H} может быть получен при различных

комбинациях кинетических моментов отдельных двигателей-маховиков. С этим свойством связана возможность оптимизации избыточных маховичных систем.

4. Область W маховичной системы. В качестве второй обобщенной характеристики избыточной маховичной системы может использоваться область W изменения вектора управляющего момента. Предположим, что двигатель-маховик – идеальное устройство, создающее на неподвижном основании управляющий момент $m_i = -dH_i/dt$ в направлении установочного вектора \mathbf{h}_i , равный входному сигналу управления. Управляющий момент всех двигателей-маховиков ограничен диапазоном $-m_* \leq m_i \leq m_*$, где m_* – максимальный управляющий момент. С учетом этого ограничения область W изменения вектора управляющего момента

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{h}_i$$

представляет собой выпуклый многогранник. Его гранями являются ромбы с длиной стороны $2m_*$.

В отличие от гиросиловых систем [3, 6], где области S и W имеют совершенно разные формы, в маховичных системах, если рассматривать двигатель-маховик как идеальное устройство, области S и W подобны. Свойства неоднозначности, выявленные для области S , сохраняются и для области W .

В реальных устройствах управляющий момент зависит от скорости вращения. Конкретный вид моментной характеристики $m_i(H_i)$ определяется типом электродвигателя. В реальных системах форма и размеры области W меняются в зависимости от кинетического момента системы и положения текущей точки s внутри области S . Это особенно характерно для точек s , близких к границе. Гранями области W могут быть параллелограммы с длинами сторон менее $2m_*$.

Следует отметить существенное отличие областей W гиросиловых и маховичных систем. В гиросиловых системах область W непрерывно меняется в зависимости от углового положения роторов гиросилов. При таком изменении возможно возникновение особых состояний, когда область W вырождается в плоскую фигуру и гиросиловая система теряет управляемость [3]. Область W маховичной системы менее «подвижна», особые состояния, связанные с потерей управляемости, внутри области S избыточной системы не возникают даже при отказах двигателей-маховиков. В силу моментных характеристик двигателей-маховиков заметные изменения области W происходят лишь вблизи границы области S .

Заключение. Показано, что область S изменения вектора кинетического момента избыточной маховичной системы представляет собой многогранник, гранями которого являются ромбы. Объем области S зависит от числа маховиков и установочного угла α . Получены формулы для расчета объема и размеров области S . Из сравнения зависимостей $V_1(n)$ и $r(n)$ следует, что при установке дополнительно одного, двух или трех маховиков объем области S увеличивается соответственно в 3,07; 7,23 и 12 раз. Радиус вписанной сферы возрастает в 1,6; 2,17 и 2,67 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленький А.Д., Васильев В.Н. Управление минимально избыточной системой электродвигателей-маховиков. М.: Известия РАН. МТТ. №2. 1996.
2. Карпачев Ю.А., Павловский М.А. Управление ориентацией космических аппаратов с произвольно-избыточной структурой одноосных электромаховичных двигателей. М.: Космические исследования. Т. 25. Вып.4. 1987.
3. Васильев В.Н. Исследование свойств системы двухстепенных силовых гироскопов. М.: Изв. АН СССР. МТТ. № 5. 1982.
4. Токарь Е.Н. Критерий настройки гиросиловых систем. М.: Космические исследования. Т. 18. Вып. 3. 1980.
5. Токарь Е.Н., Платонов В.Н. Исследование особых поверхностей систем безупорных гиродинов. М.: Космические исследования. Т. 16. Вып. 5. 1978.
6. Васильев В.Н., Вейнберг Д.М., Злочевский С.И. Обобщенные характеристики гиросиловых систем управления. М.: Космические исследования. Т. 29. Вып. 2. 1991.