УДК 621.313

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОТОРА ДЛЯ АНАЛИЗА УПРАВЛЕНИЯ МАГНИТНЫМИ ПОДШИПНИКАМИ

А.П. Сарычев, И.Г. Руковицын
(ФГУП «НПП ВНИИЭМ»)

Для учета влияния упругих свойств ротора на динамические характеристики системы управления магнитным подвесом создана математическая модель гибкого ротора, которая базируется на основе результатов модального анализа его конечно–элементной модели. Разработанная математическая модель ротора применяется при расчете параметров регулирования магнитного подвеса для роторных систем газоперекачивающих агрегатов.
Ключевые слова: *ротор, магнитные подшипники, магнитный подвес, математическая модель.*

В настоящее время в газовой промышленности широко применяются газоперекачивающие агрегаты (ГПА) с системой магнитного подвеса (МП) ротора.

По принципу действия магнитные опоры являются системой автоматического управления (САУ МП), которая в течение длительного времени автоматически поддерживает требуемое значение воздушного зазора между статором и ротором. Ротор, взаимодействующий со статором, является объектом регулирования. САУ МП по сигналам датчиков положения с помощью заданного закона управления регулятора формирует токи в обмотках электромагнитов, для парирования внешних статических и динамических воздействий, обеспечивая центрирование ротора в воздушном зазоре между ротором и статором.

Таким образом, САУ МП – это совокупность автоматического регулятора, исполнительного органа и регулируемого объекта, и представляет собой замкнутую систему, в которой передача воздействий от одного ее звена к другому осуществляется по замкнутому контуру (рис.1). На ротор в системе регулирования, кроме собственных сил инерции, действуют внешние возмущающие нагрузки $F(t)_{вн}$ (силы неуравновешенности ротора на критических скоростях вращения, силы давления и биения природного газа) и электромагнитные силы $F(t)_{эм}$ подшипников, компенсирующие внешние воздействия. Входными параметрами для регулятора являются

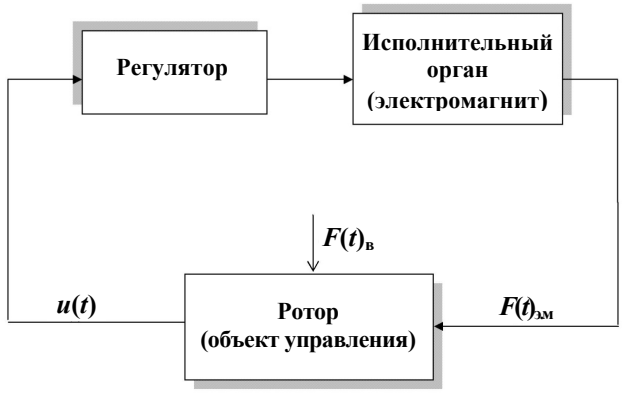

Рис. 1. Структурная схема САУ МП

перемещения ротора *u(t)*. При структурном анализе данной системы возникает первоочередная задача – исследование объекта регулирования, для чего требуется математическая модель ротора, без которой невозможен дальнейший синтез САУ МП.

Для определения динамических характеристик упругого ротора необходимо рассмотреть *механическую модель колебаний ротора* с конечным числом степеней свободы, которая строится с применением метода конечных элементов (МКЭ). Данный метод позволяет численно решить постав-ленную задачу, и в итоге определить собственные частоты и коэффициенты форм колебаний. Для более полного понимания проблемы динамики ротора на упругих опорах, которыми являются магнитные подшипники,

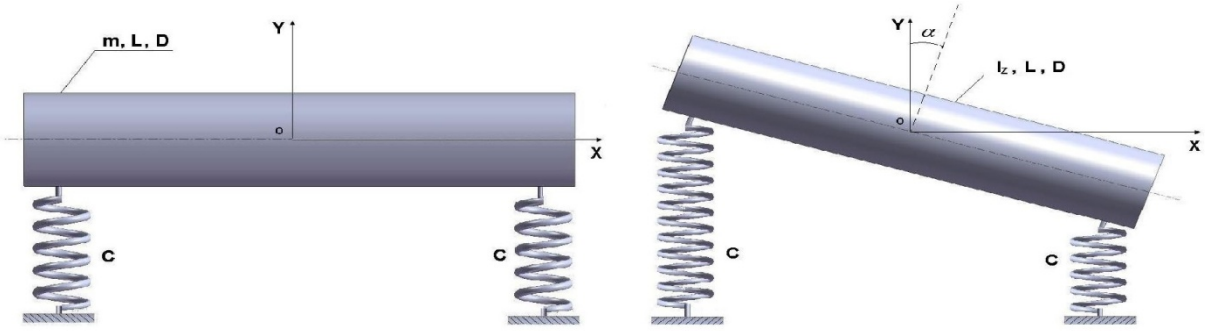

Рис. 2. Поперечная и угловая формы абсолютно жесткого стержня в плоскости *XY*

на простом примере рассмотрим первые две формы (моды) собственных колебаний. Примем следующую расчетную модель, состоящую из однородного цилиндрического стержня плотностью ρ, длиной L и диаметром D на двух упругих безмассовых опорах с жесткостью C каждая. Известно, что при достаточно податливых опорах (по сравнению с валом) ротор, обладая двумя степенями свободы, совершает колебательные движения как твердое (абсолютно жесткое) тело, образуя поперечную и угловую формы в плоскости XY, которые показаны на рис. 2.

Данная модель описывается двумя дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + 2Cy &= 0; \\ I_Z\ddot{\alpha} + 2C_\alpha\alpha &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\ddot{y}$, y – обобщенное ускорение и перемещение; $\ddot{\alpha}, \alpha$ – обобщенное угловое ускорение и перемещение; m, I_Z – масса и момент инерции.

Масса и момент инерции относительно оси Z, проходящей через центр масс однородного стержня будут следующими:

$$m = \pi\frac{D^2L\rho}{4};$$

$$I_Z = \pi\frac{D^2L^3\rho}{48}.$$

Тогда после подстановки в уравнения колебаний (1) получим:

$$\left(\pi\frac{D^2L\rho}{4}\right)\ddot{y} + 2Cy = 0;$$

$$\left(\pi\frac{D^2L^3\rho}{48}\right)\ddot{\alpha} + 2C_\alpha\alpha = 0.$$

Из условия, что центр масс находится на расстоянии $L/2$ от края вала, а межопорное расстояние L, то угловая жесткость C_α рассчитывается по следующему соотношению:

$$C_\alpha = \frac{L^2C}{4}.$$

Следовательно, уравнения для собственных частот колебаний ротора будут определяться:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{8C}{\pi D^2L\rho}};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{24C}{\pi D^2L\rho}}. \qquad (2)$$

Из полученных соотношений (2) можно увидеть, что вторая частота колебаний ротора возрастает в $\sqrt{3}$ раз по отношению к первой:

$$\omega_2 = \omega_1\sqrt{3}.$$

Ротор, помимо своих первых двух частот колебаний, имеет более высокие частоты, соответствующие изгибным формам. Аналитические методы определения *упругих частот* являются очень неточными. При расчёте сложных роторных систем, особенно с сосредоточенными и распределёнными массами и учётом изгибных форм колебаний, показанных на рис. 3. Наиболее доступным методом для определения динамических характеристик является *модальный анализ*. Динамическое поведение линейной системы представляется в виде разложения по формам (модам) собственных колебаний. Использование полного спектра форм собственных колебаний эквивалентно решению уравнений движения дискретной динамической системы в физических координатах и дает точное решение. Метод модального анализа позволяет существенно сократить трудоемкость и время вычислений в задачах роторной динамики. Он широко применяется во всех известных вычислительных комплексах для персональных ЭВМ, построенных на базе МКЭ.

Рис. 3. Изгибные колебания ротора по первым трем тонам

При создании механической модели ротор разбивается на участки постоянной жесткости так, что опоры, моменты инерции и сосредоточенные массы расположены на правой границе участков разбиения. Все участки разбиения со своими жесткостными и массовыми параметрами сводятся в таблицу, которые являются исходными данными для проведения динамического расчета ротора. Затем линейные участки постоянного сечения разбиваются на конечное число балочных элементов. В результате чего получается конечно-элементная модель вала ротора. Узлы модели, соответствующие центрам подшипников, соединены с неподвижным основанием упругими связями (пружинами), жесткость которых равна номинальной жесткости магнитных подшипников. При расчете собственных частот и форм колебаний ротора принимается, что установленные на валу детали вращения увеличивают погонную массу балочных элементов, но не влияют на их изгибную жесткость.

По результатам создается математическая модель эквивалентная динамическим свойствам упругого ротора. Структура модели в первоначаль-

ном виде показана на рис. 4 и представляет собой схему из параллельно соединенных типовых колебательных звеньев (КЗ) с передаточными функциями $W_i(p)$, каждое из которых является звеном второго порядка и описывается дифференциальным уравнением.

Объединенная передаточная функция выглядит следующим образом:

$$W_{об} = W_1(p) + W_2(p) + ... + W_i(p).$$

Если рассмотреть одно из звеньев отдельно от системы, то оно будет аналогично i-му осциллятору с собственной частотой колебаний ω_i (рад/с). Данное звено (рис. 5) осуществляет преобразование входной функции силы $f_i(p)$ через передаточную функцию $W_i(p)$ в соответствующую функцию перемещения $y_i(p)$ на выходе.

Уравнение КЗ имеет вид:

$$\frac{d^2 y_i(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_i \frac{dy_i(t)}{dt} + \omega_i^2 y_i(t) = k\omega_i^2 f_i(t),$$

где k – коэффициент усиления; ξ – коэффициент демпфирования $(0 < \xi < 1)$; ω_i – собственная частота резонансных колебаний.

Данное дифференциальное уравнение можно записать в операторном виде:

$$(p^2 + 2\xi\omega_i p + \omega_i^2) y_i(p) = k\omega_i^2 f_i(p).$$

Следовательно, передаточная функция выглядит следующим образом:

$$W_i(p) = \frac{y_i(p)}{f_i(p)} = \frac{k\omega_i^2}{p^2 + 2\xi\omega_i p + \omega_i^2}.$$

В местах установки электромагнитов (исполнительных органов) действуют управляющие и возмущающие силы, а радиальные перемещения ротора в воздушном зазоре контролируются датчиками положения. Коэффициенты влияния этих сил равны коэффициентам собственных форм колебаний b_{1i}, b_{2i} и d_{1i}, d_{2i} (i-е число форм) в узловых точках расположения магнитных подшипников и датчиков, которые показаны на рис. 6.

На входы колебательных звеньев с передаточными функциями $W_i(p)$ будут поступать суммарные сигналы электромагнитных сил F_1, F_2 через соответствующие звенья масштабирования (МЗ) с узловыми коэффициентами форм магнитных подшипников b_{1i}, b_{2i}. После решения дифференциального уравнения звена получаем функцию обобщенного перемещения y_i, которая является входным параметром звена масштабирования с коэффициентом d_i модальной координаты датчика положения ротора.

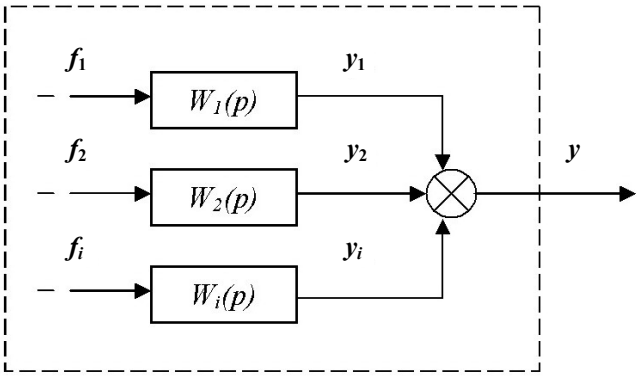

Рис. 4. Первоначальная математическая модель ротора

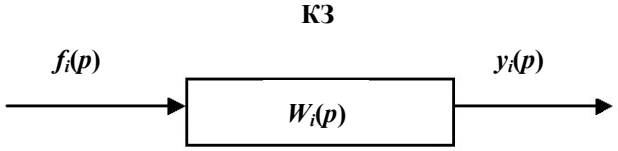

Рис. 5. Колебательное звено

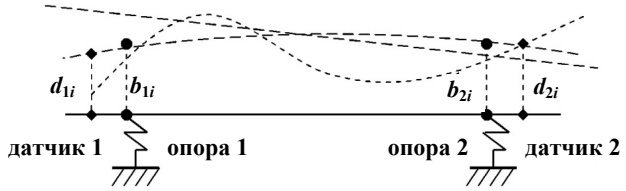

Рис. 6. Точки расположения магнитных подшипников и датчиков на роторе

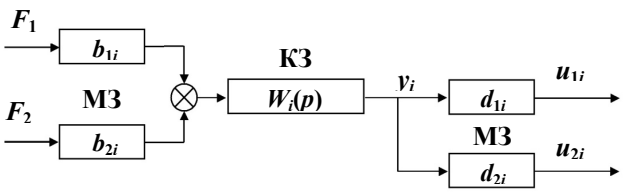

Рис. 7. Структурная схема *i*-й цепи математической модели ротора

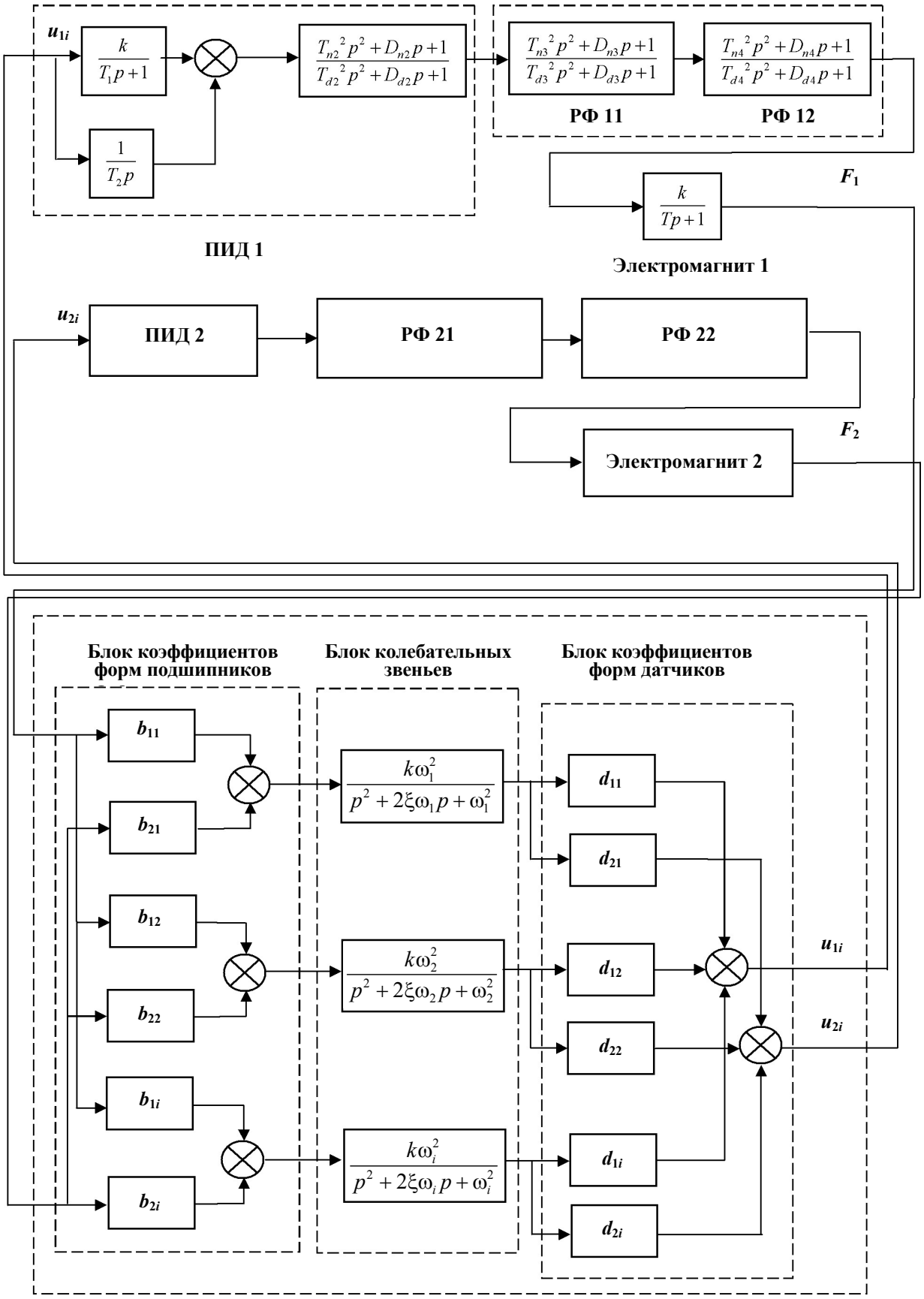

Рис. 8. Структурная математическая модель САУ МП

Затем на выходе получаются искомые перемещения u_{1i} и u_{2i}, соответствующие местам расположения блоков датчиков магнитных опор ротора и описываемые математическим соотношением, которое сводится к суммированию по количеству форм колебаний:

$$u_{1i} = \sum_i d_{1i} y_i;$$

$$u_{2i} = \sum_i d_{2i} y_i.$$

На рис. 7 показана структурная схема *i*-й цепи математической модели ротора.

В результате математическая модель ротора свободно интегрируется в САУ МП. Замкнутая схема управления (см. рис.1) преобразуется в структурную математическую модель САУ МП (рис. 8) и может быть реализована в любой специализированной математической среде с помощью ПЭВМ. Все необходимые динамические параметры объекта управления: коэффициенты форм в подшипниках b_{1i}, b_{2i} и датчиках d_{1i}, d_{2i}, а также постоянные коэффициенты передаточных функций ω_i^2, $2\xi\omega_i$ и k, для каждой из учитываемых собственных форм колебаний ротора заносятся в операционные звенья системы. Разработанная математическая модель ротора непосредственно используется для дальнейшего анализа особенностей режимов управления упругим ротором.

Цепочки каналов управления, представленные в базовом виде, могут видоизменяться в зависимости от динамики упругих свойств ротора. По сигналам датчиков регулятором вычисляется требуемый сигнал управления токами электромагнитов, создающие управляющие силы, воздействующие на ротор. Пропорциональное интегродифференцирующее звено второго порядка (ПИД) обеспечивает устойчивость системы управления, а режекторные фильтры (РФ) служат для подавления упругих частот ротора. В простейшем случае электромагнит является апериодическим звеном с постоянной времени T и коэффициентом усиления k. Усилия электромагнитов воздействуют на ротор, а перемещения ротора отслеживаются датчиками положения.

Полученная математическая модель ротора позволяет учитывать «подвесочные» формы колебаний (твердого тела) и упругие (изгибные) колебания ротора, а также может применяться при расчете параметров регулирования МП роторных систем ГПА для магистральных газопроводов.

Литература

1. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники: теория, расчет, применение / Ю. Н. Журавлев. – СПб.: Политехника, 2003. – 206 с.: ил.

2. Лазарева Т. Я. Основы теории автоматического управления / Т. Я. Лазарева, Ю.Ф. Мартемьянов – Тамбов: ТГУ, 2003. – 218 с.: ил.

3. Магнитный подвес роторов электрических машин и механизмов // Труды ВНИИЭМ. – 1989. – Т.89. – С. 6 – 95.

Алексей Петрович Сарычев, *канд. техн. наук, зам. генерального директора - генерального конструктора, т.365-56-29.*

Илья Геннадьевич Руковицын, *инженер 1-й категории, аспирант, т. 365-35-65.*

E-mail: vniiem@vniiem.ru.