

## СОЗДАНИЕ РЕДУЦИРОВАННЫХ МАТРИЦ ЖЁСТКОСТИ И МАСС ДЛЯ СОВМЕСТНОГО АНАЛИЗА НАГРУЗОК

В.Я. Геча, Е.А. Канунникова, И.А. Мещихин  
(ФГУП «НПП ВНИИЭМ»)  
В.Е. Бордадымов, Н.Н. Даниловский  
(НПО им. С.А. Лавочкина)

*Рассмотрены вопросы, возникающие в процессе создания модели конструкции космического аппарата для совместного (с носителем) анализа нагрузок с использованием редуцированных матриц масс и жёсткостей. Дано сравнение методов статической и динамической редукации. Проведена верификация модели по результатам независимого расчёта.*

**Ключевые слова:** космические аппараты, совместный анализ нагрузок, статическая и динамическая редукация, матрицы масс и жёсткостей.

### Введение

Актуальность данной работы обусловлена одним из этапов отработки космического аппарата (КА), а именно необходимостью создания динамической модели КА для совместного расчёта системы «ракета-носитель (РН) – разгонный блок (РБ) – космический аппарат» на этапе выведения. Такой расчёт проводится разработчиком средства выведения, а модели разгонного блока и космического аппарата поставляются их разработчиками. Принятый в настоящее время в мире порядок расчёта подразумевает применение редуцированных моделей подсистем, или, как их иногда называют, внешних суперэлементов, которые при совместном расчёте присоединяются к остаточной конструкции. Широкое распространение данного подхода в авиакосмической отрасли объясняется, в том числе, соображениями конфиденциальности при выполнении совместных проектов на уровне нескольких предприятий, так как редуцированные матрицы не содержат информацию о конструкции. В связи с этим представляется необходимым ввести в расчётную практику НПП ВНИИЭМ методику создания, тестирования и передачи редуцированных моделей конструкций КА вместо используемых в настоящее время балочных моделей. Это сложная, ответственная и многоэтапная задача.

В данной работе рассматривается опыт создания редуцированной модели адаптера КА, которая соединяется с балочной моделью КА с одной стороны и разгонным блоком с другой стороны. Для подтверждения качества и достоверности результатов (верификации) приводится сравнение с независимым расчётом, выполненным специалистами НПО им. С.А. Лавочкина, имеющими опыт создания подобных моделей и успешной передачи результатов разработчикам РН.

### Статическая конденсация и динамическая редукация

Для совместного расчёта собственных частот системы, определения спектра ответа и других динамических расчётов редуцированные матрицы масс и жёсткости могут быть получены как методом статической конденсации [1, 2], так и методом динамической редукации Крега-Бемтона [3, 4].

Чтобы оценить разницу значений перемещений внешних узлов для статической конденсации и динамической редукации, приведем из [4] выражение:

$$\Delta u_0 = u_{\text{дин}} - u_{\text{стат}}, \quad (1)$$

где  $u_{\text{стат}}$  – перемещения внешних узлов при статической конденсации;  $u_{\text{дин}}$  – перемещения внешних узлов при динамической редукации.

Соответственно,

$$u_{\text{дин}} = [\varphi]q - [K_{oo}]^{-1} [K_{ob}]u_b; \quad (2)$$

$$u_{\text{стат}} = [K_{oo}]^{-1} [K_{ob}]u_b,$$

где  $[\varphi]$  – матрица учитываемых собственных векторов системы;  $[q]$  – вектор обобщенных координат;  $[K_{ob}]$ ,  $[K_{oo}]$  – подматрицы (части) матрицы жёсткости; индекс «о» – степени свободы, которые должны быть редуцированы; индекс «b» – граничные степени свободы, к которым производится редукация;  $u_b$  – перемещения внешних узлов.

Согласно [4] для целей редуцирования матрица жёсткости представляется в виде

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{oo}] & [K_{ob}] \\ [K_{ob}^T] & [K_{bb}] \end{bmatrix}.$$

После подстановки (2) в (1) получим

$$\Delta u_0 = [\Phi] q.$$

Согласно [4] имеем

$$q = \left[ \frac{1}{\omega^2 - \lambda^2} \right] [\Phi]^T [F],$$

где  $\left[ \frac{1}{\omega^2 - \lambda^2} \right]$  – диагональная матрица, составленная из  $\frac{1}{\omega^2 - \lambda^2}$ ;  $\lambda$  – частота вынуждающей силы;  $\omega$  – собственная частота;  $[F]$  – вектор сил.

Таким образом, разница в решении задачи при применении методов статической конденсации и динамической редукции будет прямо пропорциональна амплитудным значениям вектора сил и обратно пропорциональна разнице квадратов собственной частоты и частоты вынуждающей силы.

Определить необходимое число учитываемых при редукции собственных частот на практике можно применив следующее правило: для получения хорошего соответствия между решениями полной и редуцированной системы в заданном диапазоне частот при редукции надо учесть все собственные векторы системы с закреплёнными границами в диапазоне частот в 1,25 – 1,5 раза выше, чем исходный диапазон [4].

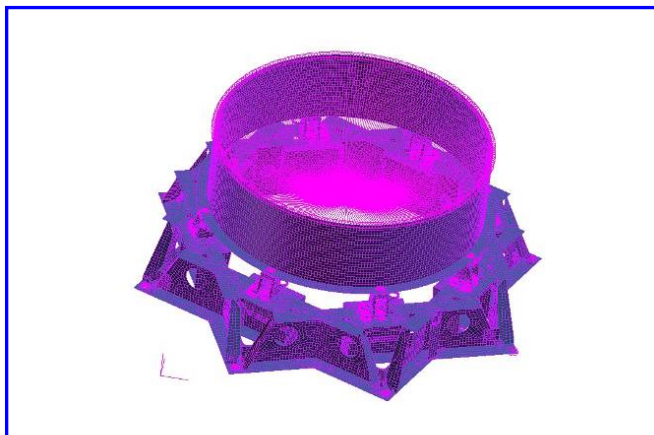


Рис. 1. Девятиузловая конечно-элементная модель

Например, если в системе частота вынуждающей силы меньше 10 Гц, то при редукции надо учитывать собственные векторы в диапазоне до 12,5 – 15 Гц.

Если все частоты системы с закреплёнными границами в 1,5 раза выше частоты вынуждающей силы, то при редукции можно не использовать обобщённые координаты. В этом случае динамическая редукция вырождается в статическую.

Согласно требованиям разработчика средств выведения, если первая собственная частота адаптера КА выше 100 Гц, допускается использование статической конденсации. Ниже будет показано, что при создании редуцированной модели рассматриваемого адаптера достаточно статической конденсации.

### Описание модели адаптера

Конечно-элементная модель (модель 1) адаптера первоначально была составлена для расчёта на прочность [5]. Практически эта же модель используется и для формирования редуцированных матриц, при этом выделяются восемь стыковочных узлов адаптера с разгонным блоком, а также восемь узлов стыковки с КА (всего шестнадцать внешних узлов). В случае задания КА в виде балки восемь узлов на стыке с КА сводятся к одному узлу – получается девятиузловая модель адаптера. Тогда для учёта местной жёсткости в модель добавляется фрагмент гермокорпуса.

Общий вид модели представлен на рис. 1.

### Верификация модели

Для проверки правильности построенной модели (модель 1) было проведено сравнение с результатами, полученными для независимой модели (модель 2) в (НПО им. С.А. Лавочкина). Модель строилась на основе тех же исходных данных (твёрдотельной модели), и отличается только разбиением на элементы и моделированием отсутствующих в твёрдотельной модели деталей (например болтов). Чтобы разделить погрешность, связанную с различием в разбиении, и собственно погрешность от процедуры конденсации сначала сравниваются полные модели, а затем матричные.

Сравнение проводилось:

- по массово-инерционным характеристикам;
- по собственным частотам незакреплённой и закреплённой моделей;
- по жёсткостям в осевом и поперечном направлении и др.

Здесь приведём только результаты сравнения по собственным частотам как наиболее наглядным и характеризующим массовые и жёсткостные свойства модели.

В табл. 1 приведены собственные частоты незакрепленного адаптера для полных и конденсированных моделей, а в табл. 2 – собственные частоты закреплённого по внешним узлам адаптера. Результаты приводятся только для полных моделей, так как для конденсированных моделей количество степеней свободы определяется внешними узлами, а они в данном случае все закреплены.

Из табл. 1 и 2 видно, что разница в значениях собственных частот, обусловленная различием моделей и различием между редуцированной и полной моделями, имеет один порядок малости и не превышает 2,5%.

#### Использование редуцированной модели для оценки жёсткости конструкции

По результатам расчётов низшие собственные частоты адаптера составляют:

– при незакреплённых граничных узлах 98 Гц (табл. 1);

– при закреплённых граничных узлах 351,7 Гц (табл. 2).

Эти значения характеризуют сам адаптер, однако, практический интерес представляют частоты адаптера совместно с КА. Следует отметить, что в соответствии с требованиями разработчиков средств выведения, частота КА с адаптером должна быть, как правило, выше 12 Гц, в противном случае требуются дополнительные исследования.

Для рассмотренной конструкции адаптера значения низших собственных частот совместно с КА составили:

7,5 Гц – для адаптера с жёстким инерционно-массовым имитатором КА;

6,8 Гц – для адаптера с присоединённой балочной моделью КА.

Это не укладывается в предъявленные требования и говорит о необходимости ужесточения рассматриваемой конструкции. Отметим также, что для рассмотренной конструкции адаптера требования по жёсткости существенно превосходят требования необходимой прочности. Поэтому необходимо как можно раньше разрабатывать соответствующие модели и проверять удовлетворяет ли жёсткость конструкции КА предъявленным требованиям.

Таблица 1

**Собственные частоты (Гц) незакреплённого адаптера для полных и конденсированных моделей**

№ формы*	Полная модель			Конденсированная модель	
	Модель 1	Модель 2	Разница значений, %	Модель 1	Разница значений с полной, %
1	96,20	96,26	0,061	98,31	2,19
2	96,23	96,26	0,031	98,37	2,22
3	148,11	152,13	2,63	150,86	1,85
4	148,15	152,13	2,61	150,20	1,38
5	255,33	249,32	2,40	261,42	2,38
6	255,97	259,99	1,92	262,15	2,41

\* В таблице не приводятся «нулевые» частоты, связанные с движением твёрдого тела, так как их абсолютное значение не имеет физического смысла, а важен лишь их порядок малости, который для обеих моделей составляет  $10^{-5}$ .

Таблица 2

**Собственные частоты (Гц) закреплённого адаптера для полных моделей**

№ формы	Модель 1	Модель 2	Разница значений, %
1	354,22	351,75	0,70
2	354,69	351,75	0,83
3	359,77	355,31	1,25
4	359,85	355,31	1,27
5	364,20	357,37	1,91
6	364,45	357,37	1,98

### Выводы

1. Проведены работы по созданию и верификации модели адаптера КА для совместного (с носителем) анализа нагрузок с использованием редуцированных матриц масс и жёсткостей. Полученные редуцированные матрицы соответствуют полной модели адаптера и достоверно передают жёсткостные характеристики конструкции в пределах инженерной погрешности (меньше 3%).

2. Применение метода суперэлементов расширит возможности предприятия в части использования современных средств динамического анализа конструкций КА.

3. Разработку динамических моделей конструкций КА (включая адаптер) и их проверку на соответствие требованиям по жёсткости необходимо осуществлять на ранних этапах проектирования КА.

### Литература

1. MSC.Nastran.Superelement User's Guide // MSC.Software Corporation. – 2001. – 72 с.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов / Р. Галлагер; пер. с англ. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
3. Клайн К. А. Исследование динамического поведения конструкции с помощью усечённого базиса из собственных форм и векторов // Аэрокосмическая техника. – 1987. – № 6. – С. 168.
4. Жидяев К. А. Использование метода динамического синтеза (Крейга-Бемптона) в MSC. NASTRAN / К. А. Жидяев // Методические материалы MSC.Software. – 1999. – С. 5.
5. Применение суперэлементов в прочностных расчётах космических аппаратов / Е. А. Канунникова, И. А. Мешихин // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ. – М. : ФГУП «НПП ВНИИЭМ», 2011. – Т. 121. – № 2. – С. 31 – 34.

Поступила в редакцию 23.12.2010

*Владимир Яковлевич Геча, д-р техн. наук, начальник отдела.*

*Елена Александровна Канунникова, канд. техн. наук, начальник лаборатории.*

*Илья Александрович Мешихин, инженер.*

*Т. 366-33-61, e-mail: vniiem@vniiem.ru.*

*Виктор Евгеньевич Бордадымов, начальник сектора.*

*Николай Николаевич Даниловский, аспирант, инженер-конструктор.*