

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОРБИТЫ ДЛЯ МНОГОПОЛОСНОГО ОБЗОРА ЗЕМЛИ ИЗ КОСМОСА

В.К. Саульский

Решается задача определения рациональных орбит и структуры для систем спутников, осуществляющих многополосное наблюдение Земли, используя несколько бортовых съёмочных приборов с различными полями зрения. Требуется обеспечить равномерно высокое качество обзора заданного пояса широт для всех приборов одновременно. Качество наблюдения оценивается по критерию, равному частному от деления реализуемой периодичности обзора на её предельно минимальное значение, когда отсутствуют боковые перекрытия полос обзора. Для решения поставленной задачи применяется специальный метод, в рамках которого динамичный процесс покрытия произвольной широты Земли полосами обзора спутников отображается в статичном виде в системе координат: «географическая долгота – момент времени пересечения широты спутником». Показано, что цель статьи достигается, когда отношения размеров полос обзора являются числами ряда Фибоначчи. Выведены соответствующие формулы для расчёта орбит и структуры многоспутниковых систем при таком условии.

Ключевые слова: восходящий, нисходящий, полоса обзора, многополосный обзор, ряд Фибоначчи, спутниковая структура, система спутников, многоспутниковый, векторная модель, модель обзора, односторонний обзор, двусторонний обзор.

На борту современных метеорологических спутников устанавливаются комплексы съёмочных и зондирующих приборов с разными полосами обзора (на земной поверхности). Тенденция применения всё более многочисленных видов целевой аппаратуры усиливается, как следует из литературы [1–4]. Поэтому растёт актуальность поиска орбит и спутниковых структур из условия как можно более равномерной минимизации периодичностей обзора задаваемого пояса широт для всех приборов бортового комплекса. При произвольном составе полос обзора, эта задача вряд ли разрешима. Однако, как будет показано в данной статье, она имеет хорошее решение, если из соотношений размеров этих полос образуется ряд Фибоначчи [5] или некоторые новые последовательности целых чисел.

Для обоснования этого вывода и расчёта орбит и структур ИСЗ используется векторная модель. Она отображает динамику покрытия произвольной земной широты полосами обзора спутников в статичном виде.

Модель односпутникового одностороннего обзора широты Земли

На рис. 1 показана модель обзора произвольной широты Земли φ в простейшем случае, когда осуществляется: её одностороннее покрытие полосой единственного спутника на восходящих или, наоборот, нисходящих сторонах орбиты. Каждый маленький кружок, называемый «узлом» спутника, соответствует долготе (на оси абсцисс) и моменту времени (на оси ординат) очередного появления ИСЗ на данной широте. За начало координат взят любой из этих узлов. Долготы измеряются в угло-

вых величинах (радианах), а время – в витках, т. е. драконических периодах обращения.

Эта геометрическая, а точнее векторная модель удобна для измерения промежутков времени между моментами наблюдения со спутника любой точки широты. Точка фиксируется вертикальной прямой, соответствующей её долготе. На рис. 1 отрезками прямых линий изображены участки широты, пересекаемые полосой обзора спутника, когда он проходит через некоторые узлы. Назовём такие участки «следами». Расстояние по вертикали между парой следов определяет интервал времени между попаданиями данной точки в поле зрения целевого прибора ИСЗ.

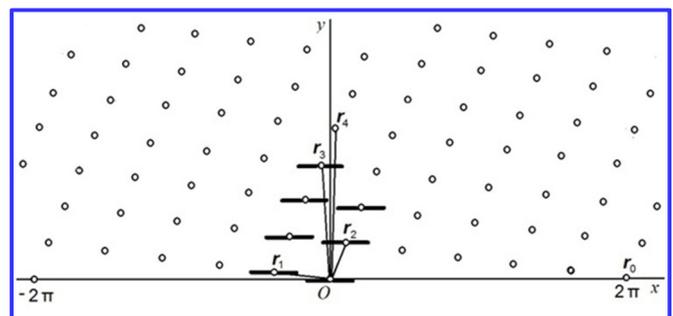


Рис. 1. Модель односпутникового одностороннего обзора в общем случае

Любой узел задаётся радиус-вектором $\mathbf{r}_j = x_j \mathbf{i} + Y_j \mathbf{j}$, где x_j – долгота; Y_j – время; \mathbf{i} , \mathbf{j} – единичные векторы-орты [6]. Здесь и далее все целочисленные величины будут записываться заглавными буквами, за исключением порядковых номеров и индексов. Базисными векторами [6] служат:

$$\mathbf{r}_0 = 2\pi \mathbf{i}; \quad \mathbf{r}_1 = -\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad (1)$$

векторное произведение которых

$$\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_1 = 2\pi \mathbf{k}, \quad (2)$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные векторы-орты [6]; l – межвитковый интервал (в радианах).

Введём векторы $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \dots$, вычисляемые из следующих рекуррентных соотношений, обеспечивающих неуклонное приближение \mathbf{r}_j к оси ординат:

$$M_j = E\left(\frac{x_{j-1}}{x_j}\right), \quad \mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_{j-1} + M_j \mathbf{r}_j, \quad (3)$$

где $j=1, 2, 3$, а начальными величинами являются

$$x_0 = 2\pi, \quad Y_0 = 0, \quad x_1 = -l, Y_1 = 1. \quad (4)$$

В (3) функция E равна целой части своего аргумента, коэффициенты M_j далее играют важные роли и будут именоваться j -ми «этапными множителями».

С учётом (2) и (3) методом полной индукции можно установить, что

$$\mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_{j+1} = 2\pi \operatorname{sign}(x_j) \mathbf{k}, \quad (5)$$

где $\operatorname{sign}(a)=1$ при $a>0$, $\operatorname{sign}(a)=0$ при $a=0$, $\operatorname{sign}(a)=-1$ при $a<0$.

Любой вектор \mathbf{r}_j представим также в виде линейной комбинации:

$$\mathbf{r}_j = W_j \mathbf{r}_0 + Y_j \mathbf{r}_1, \quad (6)$$

где целочисленные коэффициенты W_j рассчитываются по формуле:

$$W_{j+1} = W_{j-1} + M_j W_j,$$

при начальных значениях

$$W_0 = 1 \text{ и } W_1 = 0. \quad (7)$$

По рис. 1 можно мысленно проследить, как растут вертикальные расстояния между следами на широте φ , если их длина сокращается. Достаточно наблюдать за изменениями вертикальных интервалов выше следа с центром в начале координат. В моменты достижения некоторых значений длин следов и затем их бесконечно малом уменьшении возникают новые наибольшие интервалы. Эти мо-

менты распределены по этапам с номерами $j=1, 2, \dots$ внутри которых имеются подэтапы со своими номерами $m=1, 2, \dots, M_j$. В пределах j -го этапа очередной m -й подэтап существует, пока длина $d(\varphi, j, m)$ следа удовлетворяет следующему неравенству:

$$\begin{aligned} |x_{j-1}| - (m-1)|x_j| &\leq d(\varphi, j, m) < \\ < |x_{j-1}| - (m-2)|x_j| \quad m=1, 2, \dots, M_j. \end{aligned} \quad (8)$$

При односпутниковом одностороннем обзоре возникает не более трёх перерывов $t_1(j, m)$, $t_2(j, m)$, $t_3(j, m)$ в наблюдениях произвольной точки широты φ со следующими вероятностями (частотами) f_1, f_2, f_3 :

$$\begin{aligned} t_1(j, m) &= Y_{j-1} + (m-1)Y_j; \\ f_1 &= 1 - \frac{|x_{j-1}| - m|x_j| + |x_j|}{d(\varphi, j, m)}; \end{aligned} \quad (9_1)$$

$$\begin{aligned} t_2(j, m) &= Y_{j-1} + mY_j; \\ f_2 &= \frac{|x_{j-1}| - m|x_j| + 2|x_j|}{d(\varphi, j, m)} - 1; \end{aligned} \quad (9_2)$$

$$t_3(j, m) = Y_j, \quad f_3 = 1 - \frac{|x_j|}{d(\varphi, j, m)}. \quad (9_3)$$

Для оптимизации многополосного наблюдения нужно, чтобы полосы обзора давали наименьшие (левые) следы в (8), называемые «миниследами». Они не зависят от широты φ и обозначаются $b(j, m)$. Для них $f_1 = 0$ и перерывы (9₁) не возникают. Если на этапе с номером $j=J$ выполнено также и равенство

$$|x_{J-1}| = M_J |x_J|. \quad (10)$$

то для $m=M_J$ минислед $(J, M_J) = |x_J|$ и $f_3 = 0$.

С учётом (3) из условия (10) вытекает $x_{J+1} = 0$, поэтому

$$\mathbf{r}_{J+1} = Y_{J+1} \mathbf{j}. \quad (11)$$

При выполнении условия (10) выделение новых этапов заканчивается, J – номер последнего этапа, а орбита изомаршрутная с периодом повторения

$$T = Y_{J+1}. \quad (12)$$

Эта орбита удобна для многополосного обзора, так как образование миниследов не должно идти бесконечно.

Среди всех вариантов обзора надо найти наилучшие, оценивая качество покрытий Земли для каждой полосы. Полную характеристику обзора даёт состав частот (9). Однако для сравнения вариантов нужен один критерий, а не набор $t_1(j, m)$, $t_2(j, m)$, $t_3(j, m)$. В таком качестве обычно выступает наибольший перерыв t_{\max} в наблюдениях всех точек заданной области Земли, называемый периодом обзора [7]. В (9) это $t_2(j, m)$, измеряемый в витках. Для избавления от размерности можно перейти к относительному «критерию качества», пригодному и в самом общем случае многоспутникового двустороннего обзора:

$$q = \frac{t_{\max}}{t_{\min}}, \quad (13)$$

где t_{\min} – минимальный период, возможный лишь при полном отсутствии перекрытий следов на нижней широте заданной области Земли. Очевидно,

$$t_{\min} = \frac{2\pi}{QKd(\varphi, j, m)}, \quad (14)$$

где множитель Q равен 1 для одностороннего обзора и 2 для двустороннего, K – количество спутников. Подставляя (14) в (13), находим

$$q = \frac{Qkd(\varphi, j, m)t_{\max}}{2\pi}. \quad (15)$$

Для расчёта следа $d(\varphi, j, m)$ от полосы обзора p (км) рекомендуется приближённая формула, полученная путём замены сферической поверхности земного шара на касательную плоскость (в точке узла спутника):

$$d(\varphi) = \frac{p}{r_3 \sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi}} - \frac{pl \cos i}{2\pi r_3 \sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi}}, \quad (16)$$

где $r_3=6371$ км – средний радиус Земли, i – наклонение орбиты.

Строгая, но громоздкая процедура расчёта следа, учитывающая все нюансы его формирования, содержится, например, в [8]. Обратная формула:

$$p = d(\varphi) r_3 \sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi} \frac{(2\pi - l \cos i)}{2\pi}. \quad (17)$$

При односпутниковом одностороннем обзоре на основании (8) наименьшие, т. е. наилучшие значения критерия качества q достигаются на m -ом подэтапе j -го этапа для миниследа

$$b(j, m) = |x_{j-1}| - (m-1)|x_j|,$$

Подставляя эту величину в (15) и используя в качестве t_{\max} значение $t_2(j, m)$ из (9₂), определяем

$$q = \frac{Y_{j-1}|x_{j-1}| + mY_j|x_{j-1}| - (m-1)Y_{j-1}|x_j| - (m^2 - m)Y_j|x_j|}{2\pi}.$$

Исследуем q как функцию непрерывного аргумента m . Используя её производные и неравенства

$$M_j|x_j| < |x_{j-1}| < (M_j + 1)|x_j|,$$

находим, что q имеет максимум, когда $M_j/2 < m < (1+M_j)/2$. Поэтому при $M_j \geq 3$ минимумы q наступают на краях сегмента $[1, M_j]$. Следовательно, для многополосного обзора желательно $M_j \leq 2$. Однако 1-й множитель M_1 всегда больше 2. Например, для диапазона высот орбит h от ~600 до ~900 км он равен 14. Значение M_1 фиксирует широкий интервал высот орбит. Остальные этапные множители уточняют h внутри него.

Выполнение условия (10) и неравенства $|x_{j-1}| > |x_j|$ возможно лишь при $M_j \geq 2$. В итоге для оптимизации многополосного обзора рекомендуется

$$M_2 \leq 2, M_3 \leq 2, \dots, M_{j-1} \leq 2, M_j = 2. \quad (18)$$

Далее рассматриваются только изомаршрутные орбиты. Для облегчения их анализа можно растянуть картину на рис. 1 по горизонтали так, чтобы все векторы \mathbf{r}_j приобрели целочисленные проекции на оси абсцисс. Покажем, как это сделать. На последнем J -м этапе с учётом (5) $\mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_{j+1} = 2\pi \text{sign}(x_j)k$, откуда с учётом (11) и (12) $T|x_j| = 2\pi$, а потому и $|x_j| = 2\pi/T$.

С учётом (6), (11), (12) получаем $\mathbf{r}_{j+1} = W_{j+1}\mathbf{r}_0 + Y_{j+1}\mathbf{r}_1$.

С учётом (4) отсюда получаем $2\pi W_{j+1} - Tl = 0$, поэтому $l = 2\pi W_{j+1}/T$. Вводим целочисленный коэффициент $L = W_{j+1}$. Вводим параметр e :

$$e = |x_j| = 2\pi/T. \quad (19)$$

Используя (19), межвитковое расстояние можно представить в виде

$$l=Le. \quad (20)$$

На основе (4) и (19)

$$x_0=Te. \quad (21)$$

В силу (20) и (21) при растяжении картины на рис. 1 в $1/e$ раз вместо $x_0=2\pi$ и $x_1=-l$ возникают $X_0=T$ и $X_1=-L$. Соотношения (3) видоизменяются так:

$$M_j = E \left(\frac{X_{j-1}}{X_j} \right), \quad R_{j+1} = R_{j-1} + M_j R_j, \quad j=1,2,3\dots, \quad (22)$$

где вместо \mathbf{r}_j фигурируют следующие векторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= T\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_1 = X_1\mathbf{i} + j, \dots, \quad \mathbf{R}_j = X_j\mathbf{i} + Y_j\mathbf{j}, \dots, \\ \mathbf{R}_j &= X_j\mathbf{i} + Y_j\mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_{j+1} = T\mathbf{j} \end{aligned} \quad (23)$$

с целочисленными абсциссами $X_0 = T$,

$$X_1 = -L, \dots, \quad X_j = x_j/e, \dots, \quad X_j = \text{sign}(x_j), \quad X_{j+1} = 0.$$

После растяжения ряд формул преобразуется. Условие (10) превращается в

$$|X_{j-1}| = M_j |X_j|. \quad (24)$$

Выражения (8) и (9), определяющие функцию распределения частот перерывов на m -м подэтапе j -го этапа, изменяются так

$$\begin{aligned} |X_{j-1}| - (m-1)|X_j| \leq D(\varphi, j, m) \leq |X_{j-1}| - \\ - (m-2)|X_j|, \dots, \quad m=1, \dots, M_j; \end{aligned} \quad (25)$$

$$t_1(j, m) = Y_{j-1} + (m-1)Y_j; \quad f_1 = 1 - \frac{|X_{j-1}| - m|X_j| + |X_j|}{D(\varphi, j, m)}; \quad (26_1)$$

$$t_2(j, m) = Y_{j-1} + mY_j; \quad f_2 = \frac{|X_{j-1}| - m|X_j| + 2|X_j|}{D(\varphi, j, m)} - 1; \quad (26_2)$$

$$t_3(j, m) = Y_j; \quad f_3 = 1 - \frac{|X_j|}{D(\varphi, j, m)}; \quad (26_3)$$

$$D(\varphi, j, m) = d(\varphi, j, m)/e, \quad (27)$$

где $D(\varphi, j, m)$ – это целочисленный след на широте φ . Его наилучшее значение в виде миниследа $B(j, m)$ достигается, как и ранее, при левом равенстве в (25):

$$B(j, m) = |X_{j-1}| - (m-1)|X_j|, \quad (28)$$

а критерий качества для этого миниследа вычисляется по формуле

$$q = QKB(\varphi, j, m) t_{\max} / T. \quad (29)$$

При фиксированном наборе M_2, M_3, \dots, M_J расчёт абсцисс X_1, X_2, \dots, X_{J-1} векторов $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_{J-1}$ можно производить в обратном порядке, т. е. от $(J-1)$ -й до 1-й, учитывая, что $X_{J+1}=0$ и $X_j = \text{sign}(x_j)$. Далее понадобятся только абсолютные величины $|X_j|$. Для них, ввиду чередования знаков, т. е. $\text{sign}(X_j) = -\text{sign}(X_{j+1})$, процедура расчёта принимает следующий вид:

$$X_{j+1} = 0, \quad |X_j| = 1, \dots; \quad |X_{j-1}| = |X_{j+1}| + M_j |X_j|, \dots; \quad |X_1| = |X_3| + M_2 |X_2|. \quad (30)$$

Покажем, как по заданному составу этапных множителей M_2, M_3, \dots, M_J определяются все характеристики многополосного обзора и орбита.

На основе (28) образуется следующий ряд возрастающих целочисленных миниследов $B(\varphi, j, m)$, перечисляемых в обратном порядке:

$$B(\varphi, J, M_J), \quad B(\varphi, J, M_J - 1), \dots, \quad B(\varphi, 2, 1). \quad (31)$$

Удобно ввести краткие обозначения для этого перечня миниследов:

$$\begin{aligned} B_1 &= B(\varphi, J, M_J); \quad B_2 = B(\varphi, J, M_J - 1); \\ B_N &= B(\varphi, 2, 1). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь N – число следов в (31). Используя (30), находятся $|X_j|$, а по ним с учётом (28) все B_n , включая $B_N=L$. Для расчёта коэффициента L , задающего по формуле (20) межвитковое расстояние, можно также (с целью контроля хода вычислений) применять альтернативную процедуру (7), так как $L=W_{j+1}$.

Определяется период изомаршрутности T , учитывая его совпадение с $|X_0|$:

$$T = |X_0| = |X_2| + M_1 |X_1|. \quad (33)$$

По формулам (3) находятся ординаты Y_1, Y_2, \dots, Y_{J+1} . По значению Y_{j+1} вновь проверяется ход расчётов, так как должно быть $Y_{j+1}=T$. Подставляя найденные ординаты в (26₂), вычисляются периодичности обзора $T_n = t_2(\varphi, j, m)$ для миниследов B_n . По формуле (29) вычисляются критерии качества.

В заключение по найденному значению L можно найти межвитковое расстояние l из (20), а затем рассчитать высоту орбиты h . Для этого имеются

точные методы, учитывающие все особенности гравитационного поля Земли. Здесь достаточно ограничиться следующим приближённым соотношением из [9] для быстрого итерационного расчёта h , полагая для начала $h = 0$:

$$h = \left(\frac{l\sqrt{\mu}}{2\pi\omega} - \frac{\varepsilon \cos i}{\sqrt{\mu}(r_3+h)^2\omega} - \frac{\varepsilon(1-4\cos^2 i)}{\mu\sqrt{r_3+h}} \right)^{2/3} - r_3, \quad (34)$$

где $\mu = 398602 \text{ км}^3/\text{с}^2$; $\varepsilon = 2,634 \cdot 10^{10} \text{ км}^5/\text{с}^2$; $\omega = 7,29211 \cdot 10^{-5} \text{ рад. с.}$

В формуле (34) считается заданным наклонение орбиты i . Однако, в случае солнечно-синхронной орбиты (ССО) оно зависит от её высоты и может быть вычислено по следующей приближённой формуле [9]:

$$i_{\text{cco}} = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left(\frac{2\pi(r_3+h)^7\sqrt{\mu}}{\varepsilon T_{\text{тр}}} + \frac{2\pi(r_3+h)^2}{\sqrt{\mu} T_{\text{тр}}} - \frac{32\pi^3(r_3+h)^{17}\sqrt{\mu}}{\varepsilon^2 T_{\text{тр}}^3} \right), \quad (35)$$

где $T_{\text{тр}}$ – тропический год, равный $\sim 365,2422$ сут., $r_3 = 6371 \text{ км.}$

Система уравнений (34) и (35) обеспечивает итерационный расчёт h и i_{cco} , зная межвитковое расстояние l . Для достаточно точных оценочных вычислений в формуле (35) можно учитывать лишь первое слагаемое в скобках.

Продemonстрируем результативность изложенной процедуры, применив её для 1-го варианта обзора, заданного следующей цепочкой этапных множителей:

$$\text{Тун } F1: M_2=M_3=\dots=M_{J-1}=1, \quad M_J=2. \quad (36)$$

Такой набор не случаен. Он наилучшим образом соответствует условию (18). Пример геометрической модели, удовлетворяющей (36), дан на рис. 2.

С учётом (36) последовательности (31) и (32) приобретают следующий вид:

$$B(\varphi, J, 2); \quad B(\varphi, J, 1); \quad B(\varphi, J-1, 1), \dots; \\ B(\varphi, j, 1), \dots; \quad B(\varphi, 2, 1); \quad B_1 = B(\varphi, J, 2), \quad (37)$$

$$\text{а дальше для } n=2, 3, \dots, N \quad B_n = B(\varphi, J-n+2, 1), \quad (38)$$

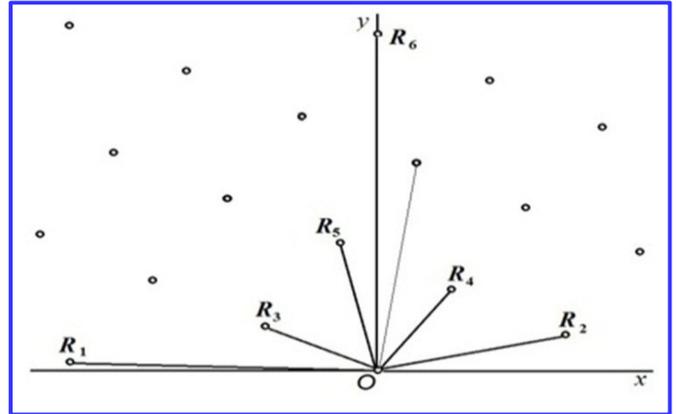


Рис. 2. Модель односпутникового одностороннего обзора по типу F1

причём для набора этапных множителей (36) количество миниследов $N = J$.

Используя (30), (36) и (28), находим значения миниследов (38):

$$B_1=1, \quad B_2=2, \quad \text{далее для } n=3, 4, \dots, N \quad B_n=B_{n-1}+B_{n-2}.$$

Видно, что это числа из известного ряда Фибоначчи [5], который задаётся так:

Ряд F: $F_1=F_2=1$, а далее для

$$n \geq 3 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \quad (39)$$

Итак, значения всех целочисленных следов B_n можно записать в виде

$$B_n = F_{n+1}, \quad n=1, 2, \dots, N, \quad (40)$$

в том числе

$$L = |X_1| = B_N = F_{N+1}, \quad |X_2| = B_{N-1} = F_N. \quad (41)$$

Для контроля найдём коэффициент $L = W_{J+1}$ из соотношений (7) с учётом (36):

$$W_j = W_{j-2} + W_{j-1} = F_{j-1} \quad \text{для } j=3, 4, \dots, J,$$

$$W_{J+1} = W_{J-1} + 2W_J = F_{J+1},$$

а поэтому, с учётом $J=N$, корректность предыдущих результатов подтверждается.

Подставляя значения $|X_1|$ $|X_2|$ в (33), находим период изомаршрутной орбиты:

$$T = F_N + M_1 F_{N+1}. \quad (42)$$

Из соотношений (3) с учётом (36) получаем следующие значения ординат: $Y_1=1$ $Y_2=M_1$; $Y_j=F_{j-2}+M_1F_{j-1}$ при $j=3, 4, \dots, J$; $Y_{J+1}=Y_{J-1}+2Y_J=F_J+M_1F_{J+1}$.

Подставляя их в формулу для $t_2(j, m)$ в (26₂), определяем периодичности T_n , соответствующие миниследам из (38):

$$T_1 = Y_{J+1} = F_J + M_1 F_{J+1},$$

$$T_n = Y_{J-n+1} + Y_{J-n+2} = F_{J-n+1} + M_1 F_{J-n+2} \text{ при } n = 2, 3, \dots, N.$$

Учитывая, что $J=N$ окончательно получаем:

$$\text{для всех } n = 1, 2, \dots, N \quad T_n = F_{N-n+1} + M_1 F_{N-n+2}. \quad (43)$$

Вновь убеждаемся в правильности расчётов, поскольку T_1 из (43) равняется T из (42). Используя (20) и (41), определяем межвитковое расстояние

$$l = |X_1|e, \quad (44)$$

а по нему высоту h из (34) и (в случае ССО) наклонение орбиты i_{cco} из (35).

Для рассмотренного типа обзора относительные размеры миниследов оказались числами Фибоначчи (39), поэтому он и назван $F1$. Есть ещё один тип обзора $F2$, приводящий к тому же ряду. Он задаётся следующим набором:

$$\text{Tun } F2: M_2 = 2, M_3 = M_4 = \dots = M_{J-1} = 1, M_J = 2. \quad (45)$$

Возможны и многие другие цепочки этапных множителей, удовлетворяющие условию (18). Выделим среди них две следующие:

$$\text{Tun } G: M_2 = M_3 = \dots = M_J = 2. \quad (46)$$

$$\text{Tun } GH: M_2 = 1, M_3 = M_4 = \dots = M_J = 2. \quad (47)$$

При анализе типов обзора G и GH пришлось ввести новые числовые ряды:

$$\text{Ряд } G: G_1 = G_2 = 1, G_3 = 2, G_4 = 3, \quad (47)$$

$$G_n = G_{n-4} + 2G_{n-2} \text{ при } n \geq 5. \quad (48)$$

$$\text{Ряд } H: H_1 = 1, H_2 = 2, H_3 = 3,$$

$$H_4 = 4, \dots, H_n = H_{n-4} + 2H_{n-2}, \dots, \text{ при } n \geq 5. \quad (49)$$

При расчёте характеристик обзора для типов $F2$, G , GH применялась та же процедура, что и для $F1$. Получена следующая итоговая сводка формул (50):

$$\left. \begin{aligned} \text{Tun } F1: T &= F_N + M_1 F_{N+1}, |X_1| = F_{N+1}, X_2 = F_N \\ B_n &= F_{n+1}, T_n = F_{N-n+1} + M_1 F_{N-n+2}, N = J. \\ \text{Tun } F2: X_2 &= F_{N-1}, B_n = F_{n+1}, T_n = F_{N-n} + M_1 F_{N-n+2} \\ n < N, T_N &= 1 + M_1, N = J + 1, \\ \text{Tun } G: T &= G_{N-1} + M_1 G_{N+1}, |X_1| = G_{N+1}, \\ X_2 &= G_{N-1}, B_n = G_{n+1}, \\ T_n &= G_{N-n} + M_1 G_{N-n+2} \\ \text{при } n < N, T_N &= 1 + M_1, N = 2J - 2. \\ \text{Tun } GH: T &= G_N + M_1 G_{N+1}, |X_1| = G_{N+1}, \\ X_2 &= G_N, B_n = G_{n+1}, \\ T_n &= G_{N-n+1} + M_1 H_{N-n+1}, N = 2J - 3. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Для всех типов при $n=1, 2, 3, \dots, N$:

$$e = \frac{2\pi}{T}, \quad b_n = B_n e, \quad l = |X_1|e,$$

$$p_n = B_n r_s \sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi} (2\pi - l \cos i) / T, \quad \text{км.}$$

Число полос N для типов $F1$ и $F2$ произвольное, для типа G чётное, для типа GH нечётное.

Качество односпутникового одностороннего обзора вычисляется из (29):

$$q_n = B_n T_n / T. \quad (51)$$

Используя формулы (50) и (51), выполнены расчёты для типов $F1$, $F2$, G , GH . Результаты приведены в таблице. Исходными данными служили: $M_1=14$; число полос обзора $N=12$ для $F1$, $F2$, G и $N=11$ для GH ; орбита – ССО; обзор глобальный, но для малых полос полюса Земли с ССО недоступны.

Подытожим основные результаты. Сразу отметим, что все типы покрытия $F1$, $F2$, G , GH обеспечивают, по-видимому, наилучшие возможности для установки на борту спутника максимальных наборов съёмочных приборов. Самые удачные – $F1$ и $F2$, задаваемые наборами множителей (36) и (45). Для них возникают цепочки полос обзора, относительные размеры которых составляют ряд Фибоначчи [5]. Плотность последовательности, измеряемая как частное от деления очередной полосы на предыдущую (при чередовании по возрастанию), стремится к знаменитому «золотому сечению», равному $\sim 1,618$.

Столь малое сокращение полос (на $\sim 60\%$), если перечислять их в обратном порядке, т. е. от наибольшей, соответствующей межвитковому интервалу, до минимально допустимой, позволяет получать весьма длинные их перечни. Качество обзора, судя по значениям критерия q , является высоким, отличаясь от идеального не более, чем на 25% , при средней величине $q = 1,15$. Тем самым достигается равномерный обзор Земли для всех съёмочных приборов.

Типы покрытия G и GH , задаваемые составами этапных множителей (46) и (47), не так уж сильно уступают предыдущим по средним величинам критериев качества q : $1,18$ для G и $1,19$ для GH . Равномерность обзора здесь немного хуже, хотя и вполне приемлемая. Соотношения размеров соседних полос колеблются. Для обоих типов они попеременно близки то к $\sim 1,7$, то к $\sim 1,4$ при среднем значении $\sim 1,57$, что даже меньше «золотого сечения».

Общая модель многоспутникового обзора

Для распространения геометрической (векторной) модели односпутникового одностороннего обзора на общий случай K -спутникового двустороннего обзора введём 2 типа векторов:

1) «векторы сдвига» $\delta 2, \delta 3, \dots, \delta K$ от узла 1-го спутника до узлов соответственно 2, 3, ..., K -го спутников;

2) «вектор перехода» $\delta \phi$ к двустороннему обзору на широте ϕ .

Каждый вектор сдвига может быть записан в следующем виде:

$$\delta s = \delta x_s \mathbf{i} + \delta y_s \mathbf{j}, \text{ где } s = 2, 3, \dots, K. \quad (52)$$

Здесь δx_s и δy_s – смещения соответственно по абсциссе (в радианах) и ординате (в долях витка) s -го спутника относительно 1-го, отражающие структуру системы. Они не зависят от широты ϕ и определяются так:

$$\delta x_s = \lambda s + l \frac{\tau s}{2\pi}, \quad \delta y_s = -\frac{\tau s}{2\pi}, \quad (53)$$

где λs – разность долгот узлов орбит, а τs – разность фаз от 1-го до s -го спутника. Обе величины измеряются в радианах. Обратные формулы:

$$\lambda s = \delta x_s + l \delta y_s, \quad \tau s = -2\pi \delta y_s. \quad (54)$$

Для фиксации этих периодических величин в интервале $[0, 2\pi]$ заменяем (54) на

$$\lambda s = \text{mod}(2\pi, \delta x_s + l \delta y_s), \quad \tau s = 2\pi \text{mod}(1, -\delta y_s), \quad (55)$$

где $\text{mod}(x, y) = x \text{frac}(1 + \text{frac}(\frac{y}{x}))$, $\text{frac}(z)$ = дробная часть аргумента z .

Например, $\text{mod}(3, 1; 10, 4) = 1, 1$, $\text{mod}(3, 1; -10, 4) = 2$.

Формулы (53) и (55) задают взаимно однозначное соответствие между структурой K -спутниковой системы и её векторной (геометрической) моделью.

Вектор перехода $\delta \phi = \delta x_\phi \mathbf{i} + \delta y_\phi \mathbf{j}$ зависит от широты ϕ . Его координаты: δx_ϕ – разность абсцисс и δy_ϕ – разность ординат для любой пары «восходящий узел – нисходящий узел» одного и того же спутника.

Вместо реальной широты ϕ удобно использовать условную широту u :

$$u = \sin^{-1}(\sin \phi / \sin i), \quad \sin \phi = \sin u \sin i. \quad (56)$$

На широте u вектор перехода принимает следующую форму:

$$\delta \mathbf{u} = \delta x_u \mathbf{i} + \delta y_u \mathbf{j}. \quad (57)$$

На экваторе при $u=0$ $\delta \mathbf{0} = (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1) / 2$, поэтому с учётом (1)

$$\delta x_0 = \pi - l / 2, \quad \delta y_0 = 0, 5. \quad (58)$$

Для пары «нисходящий узел – восходящий узел» при смене экватора на широту u растёт разность их долгот на величину «функции расхождения» $v(u)$ [10]:

$$v(u) = 2 \tan^{-1}(\tan u \cos i) - l u / \pi \quad (59)$$

и увеличивается разность моментов времени их возникновения на u / π . Подставляя это значение вместе с (59) и (58) в (57), получаем:

$$\delta x_u = \text{mod}(2\pi, \pi - l / 2 - v(u)), \quad \delta y_u = \text{mod}(1, 0, 5 - u / \pi). \quad (60)$$

Для построения векторной (геометрической) модели K -спутникового одностороннего обзора нужно исходную односпутниковую одностороннюю модель, называемую «базовой», добавить на рис. 1 ($K - 1$) раз со сдвигами, задаваемыми по формуле (52). Для превращения далее уже в K -спутниковую двустороннюю модель на широте u вся только что полученная («методом наложения») K -спутниковая односторонняя картина добавляется (накладывается) один раз со сдвигом (57).

Многоспутниковая модель гораздо сложнее односпутниковой в общем случае, т. е. при произвольном наборе векторов сдвига (52). Эта модель еще более усложняется для двустороннего обзора в связи с его зависимостью от широты Земли. Однако важнейшее свойство, состоящее в возможности определения периодичностей обзора путём измерения максимальных вертикальных интервалов между следами (полос обзора), возникающими вокруг узлов спутников, остаётся в силе. Требуется поочередно рассматривать подобные расстояния для каждого из K -спутников и выбирать наибольшее из них.

В случае двустороннего обзора эта процедура удваивается, так как нужно брать в качестве нижнего сначала восходящий, а потом нисходящий след. Для каждого из них фиксируются расстояния по вертикали до ближайшего сверху восходящего или нисходящего следа, принадлежащего тому же или иному спутнику. На этой основе можно по-

строить алгоритм для определения не только периодичностей, но и полных функций распределения частот перерывов при многоспутниковом двустороннем наблюдении широтных поясов. Однако это тема для другой статьи, а в данной работе далее будут выведены формулы для расчёта структуры и орбит многоспутниковых систем в вариантах многополосного одностороннего и двустороннего обзора Земли.

Ведущим принципом синтеза многоспутниковых группировок будет служить обеспечение симметричности их векторных моделей. Это означает, что картина модели должна полностью сохраняться, если начало координат переходит в любой узел иного спутника системы, причём для двустороннего обзора не играет роли тип узла (восходящий или нисходящий). При симметричной модели нет необходимости поочередного определения вертикальных интервалов для всех спутников и обоих типов узлов. Ещё важнее то, что максимальные интервалы (и периодичности обзора) минимизируются. Дело в том, что при несимметричной модели вертикальные интервалы базовой односпутниковой картины разделяются на неодинаковые отрезки при наложении остальных базовых моделей. В случае симметрии такое деление приводит к одинаковым интервалам, которые меньше наибольшего, возникающего при неравномерном разбиении исходных односпутниковых вертикальных промежутков между следами. Симметричная многоспутниковая модель становится «условной односпутниковой», если не обращать внимание на принадлежность узлов разным спутникам, а для двустороннего обзора также и различным типам узлов.

Орбиты и структура для многоспутникового одностороннего обзора

На рис. 3 дан пример K -спутниковой векторной модели, обеспечивающей, как будет показано ниже, многополосную одностороннюю съёмку Земли *с единым солнечным временем для всех K спутников*. На рис. 3 $K = 3$, спутники находятся в общей орбитальной плоскости с равномерным распределением по фазе в её пределах. Узлы 1-го спутника показаны в виде «кружков», 2-го – «квадратиков», 3-го – «треугольничков». Орбита – солнечно-синхронная. Другого варианта спутниковой структуры при условии одинакового солнечного времени в узлах всех спутников не существует.

Этот вывод практически очевиден, но всё-таки с целью его наглядного подтверждения на рис. 3 проведена наклонная прямая, обозначенная буквой «С», и

фиксирующая изменение долготы Солнца во времени. В случае ССО она параллельна вектору \mathbf{r}_1 , а потому и прямым линиям, проходящим в его направлении через узлы всех спутников. Горизонтальное расстояние ρ (в радианах) от линии «С» до любой из этих прямых определяет единое солнечное время tc всех узлов, а потому и съёмок, по следующей формуле:

$$tc = \text{mod}(24; 12\rho/\pi + 12), \text{ ч.} \quad (61)$$

Отсюда ясно, что единое время tc для разных спутников реализуется, когда их узлы лежат на одних и тех же прямых, параллельных вектору \mathbf{r}_1 .

Симметричная K -спутниковая модель на рис. 3 является условной односпутниковой и образуется следующими начальными векторами:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0^* = 2\pi\mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{r}_1^*}{K} = x_1\mathbf{i} + \mathbf{j}/K, \quad (62)$$

где $x_1 = l = \frac{x_1^*}{K} = \frac{l^*}{K}$.

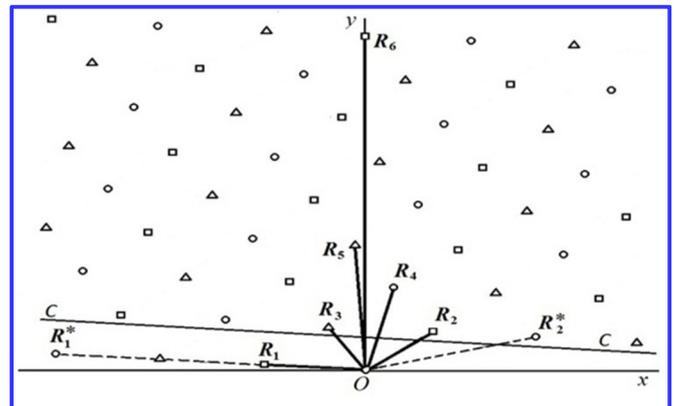


Рис. 3. Модель K -спутникового одностороннего обзора при условии единства солнечного времени съёмки для всех ИСЗ

Здесь и далее параметры базовой односпутниковой модели будут снабжаться верхним индексом *. Рассматриваются только изомаршрутные орбиты.

Из рекуррентных соотношений (3), находим последовательности этапных множителей M_j и векторов $\mathbf{r}_j = x_j\mathbf{i} + Y_j\mathbf{j}/K$, где $j = 2, 3, \dots, J+1$, причём $\mathbf{r}_{J+1} = Y_{J+1}\mathbf{j}/K$. С учётом (12) период изомаршрутности $T = Y_{J+1}$. Для условной односпутниковой модели, по-прежнему, действует формула (19). Все отношения x_j/e – целые числа. Вводя величины $X_j = x_j/e$ приходим к следующему набору векторов \mathbf{R}_j с целочисленными абсциссами на замену \mathbf{r}_j :

$$\mathbf{R}_0 = T\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_1 = X_1\mathbf{i} + \mathbf{j}/K, \dots,$$

$$\mathbf{R}_j = X_j\mathbf{i} + Y_j\mathbf{j}/K, \dots, \quad \mathbf{R}_{j+1} = T\mathbf{j}/K.$$

Эти \mathbf{R}_j аналогичны векторам (23) за исключением сокращения ординат в K раз. Сохраняются формулы (50), но значения T_n затем делятся на K для получения периодичностей t_n , которые, вообще говоря, не целочисленные:

$$t_n = T_n / K. \quad (63)$$

Межвитковое расстояние для каждого спутника с учётом (62)

$$l^* = Kl. \quad (64)$$

По рис. 3 определяется 1-й этапный множитель M_1 условной модели:

$$M_1 = KM_1^* + A^*, \quad (65)$$

где целочисленный параметр A^* задаётся, как и M_1^* , в составе исходных данных и может принимать одно из значений в интервале от 0 до $K - 1$.

На основании (6) $\mathbf{R}_{j+1} = W_{j+1}\mathbf{R}_0 + Y_{j+1}\mathbf{R}_1$.

Подставляя сюда $\mathbf{R}_{j+1} = \frac{Y_{j+1}\mathbf{j}}{K}$, $Y_{j+1} = T$, $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0^*$ и $\mathbf{R}_1 = \frac{\mathbf{R}_1^*}{K}$, а затем умножая на K , получаем равенство $T\mathbf{j} = W_{j+1}\mathbf{R}_0^*K + T\mathbf{R}_1^*$.

Следовательно,

$$\mathbf{j} \frac{T}{\text{del}(K, T)} = \mathbf{R}_0^* W_{j+1} \frac{K}{\text{del}(K, T)} + \frac{\mathbf{R}_1^* T}{\text{del}(K, T)},$$

где $\text{del}(K, T)$ – наибольший общий делитель целых чисел K и T .

Поэтому

$$T^* = \frac{T}{\text{del}(K, T)} \quad (66)$$

является периодом повторения изомаршрутной орбиты.

Используя формулу (29), вычисляем критерии качества обзора:

$$q_n = KB_n \frac{t_n}{T}. \quad (67)$$

Процедура расчёта характеристик обзора состоит в следующем. **Исходные данные:** число

спутников K , параметры M_1^* и $A^* \leq K-1$, число полос обзора N , тип покрытия ($F1$, $F2$, G или GH), граница φ области наблюдения. **Вычисляются:** M_1 , T , e , l , l^* , B_n , b_n , p_n , T_n , t_n , T^* , q_n , используя формулы (63) – (67) и (50); затем высота орбиты h и наклонение i_{cco} из (34) и (35).

Выясним спутниковую структуру. По рис. 3 находим векторы сдвига (52):

$$\delta\mathbf{s} = -(s-1)l \frac{\mathbf{i}}{K} + (s-1) \frac{\mathbf{j}}{K}, \quad s = 2, 3, \dots, K.$$

Поэтому структура по формулам (55) задаётся так: $\lambda_s = 0$, $\tau_s = \frac{2\pi(K-s+1)}{K}$.

Изменяем нумерацию спутников, тогда

$$\tau_s = \frac{2\pi(s-1)}{K}.$$

Найденная структура является симметричной.

Пример расчёта. Дано: $K=3$, $M_1^*=14$, $A^*=0$, $N=10$, тип $F1$, ССО, $\varphi = 0$. Найдено: $M_1=42$, $T=3793$, $l^* = 6\pi 89 / 3793 \approx 0,442291$, остальные результаты приведены в таблице.

Структура:

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \tau_2 = 2\pi/3, \quad \tau_3 = 4\pi/3.$$

Качество многополосного обзора для рассмотренной симметричной K -спутниковой системы столь же высокое, как и для односпутниковой, но размеры полос обзора сокращаются примерно в K раз.

Снятие требования поддержания единого солнечного времени съёмки для всех K спутников системы позволяет получить комплект полос обзора, идентичный односпутниковому варианту при уменьшении периодичностей в K раз. Пример соответствующей модели из трёх ИСЗ дан на рис. 4. Узлы 1-го ИСЗ изображены «кружками», 2-го – «квадратиками», 3-го – «треугольничками». Модель симметричная, т. е. условная односпутниковая. Однако строится она иначе, чем на рис. 3. Для её формирования применяется новая исходная пара векторов: $\mathbf{R}_1 = X_1\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{R}_2 = X_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$, причём \mathbf{R}_1 совпадает с \mathbf{R}_1^* базовой модели, образующей данную K -спутниковую методом наложения. Параметры базовой модели снабжаются индексом*. Остальные векторы $\mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, \dots, \mathbf{R}_{j+1}$ находятся из рекуррентных соотношений (3).

Абсциссы $X_j, X_{j-1}, \dots, X_2, X_1$ векторов $\mathbf{R}_j, \mathbf{R}_{j-1}, \dots, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1$ целые и могут быть заданы как принадлежащие одному из типов покрытия $F1, F2, G$ или GH . При этом фиксируется отношение, $|X_2/X_1|$, поскольку $|X_1|$ и X_2 определяются из сводки формул (50), сохраняющейся для условной модели.

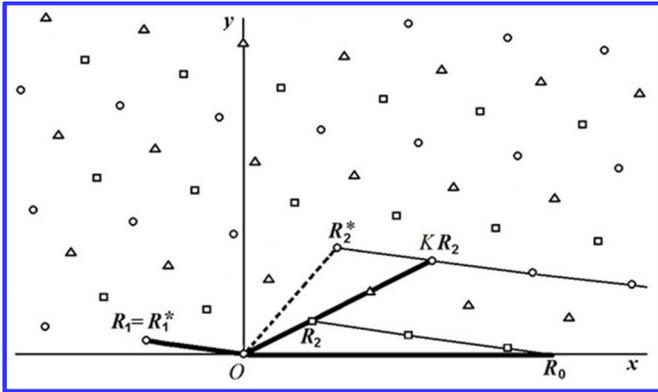


Рис. 4. Модель K -спутникового одностороннего обзора без сохранения единого солнечного времени съёмов для всех ИСЗ

По рис. 4 видно, что существует вектор

$$\mathbf{R}_0 = \frac{\mathbf{R}_0^*}{K} = X_0 \frac{\mathbf{i}}{K},$$

а также равенства $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_2 - \frac{(M_1^* - V)\mathbf{R}_1}{K} = \mathbf{R}_2 - m_1 \mathbf{R}_1$, (68)

где $V = E \left(K \left| \frac{X_2}{X_1} \right| \right)$,

$$a \quad m_1 = y_2 = \frac{M_1^* - V}{K} \quad (69)$$

ордината вектора \mathbf{R}_2 .

Тогда $\frac{X_0^*}{K} = X_0 = X_2 + m_1 |X_1|$ и период изомаршрутности

$$T^* = X_0^* = KX_0 = KX_2 + (M_1^* - V)|X_1|. \quad (70)$$

С учётом (19) $e^* = e = \frac{2\pi}{T^*}$. (71)

Сводка формул (50) сохраняется для условной односпутниковой модели со следующими уточнениями: 1) в выражения для расчёта T_n вставляются m_1 вместо M_1 причем обозначения T_n заменяются на

t_n , учитывая появление не целых периодичностей; 2) вместо T применяется T^* из соотношения (70).

Формула (29) для вычисления критериев качества обзора принимает вид

$$q_n = KB_n \frac{t_n}{T^*}. \quad (72)$$

Процедура расчёта характеристик обзора заключается в следующем. **Дано:** число спутников K , 1-й этапный множитель M_1^* , число полос N , тип обзора ($F1, F2, G$ или GH), нижняя широта φ области наблюдения Земли. **Вычисляются**, применяя формулы (68) – (71) и (50): $V, m_1, T^*, e^* = e, B_n, b_n, p_n, t_n, l^* = l$, затем q_n из (72); наконец, высота орбиты h из (34) и наклонение (в случае ССО) из (35).

Найдем структуру системы, используя формулы (52) – (55). Определяем векторы сдвига по рис. 4, мысленно устранив растяжение вдоль оси абсцисс в $1/e$ раз: $\delta \mathbf{s} = (s-1)\mathbf{r}_2$, где $s = 2, 3, \dots, K$, а $\mathbf{r}_2 = X_2 e \mathbf{i} + m_1 \mathbf{j}$. Следовательно, $\delta x_s = (s-1)X_2 e$, $\delta y_s = (s-1)m_1$. Подставляя эти значения в (55) и учитывая $e = \frac{2\pi}{T^*}$ и $l = |X_1|$, получаем

$$\lambda_s = \text{mod} \left(2\pi; \frac{2\pi(s-1)X_2}{T^*} + 2\pi(s-1)|X_1| \frac{m_1}{T^*} \right),$$

$$\tau_s = 2\pi \text{mod} (1; -(s-1)m_1).$$

Отсюда с использованием значений T^* из (70) и m_1 из (69) находим

$$\lambda_s = \frac{2\pi(s-1)}{K}, \quad \tau_s = 2\pi \text{mod} \left(1; -(s-1) \frac{M_1^* - V}{K} \right).$$

Второе из данных выражений можно привести к немного более удобному виду:

$$\tau_s = 2\pi \text{mod} \left(1; (s-1) \frac{(M_1^* - V)(K-1)}{K} \right).$$

Такая спутниковая структура, как и выше, при сохранении единого времени съёмов, является симметричной и принадлежит к известному классу «кинематически правильных систем» Г.В. Можаява [7]. Применительно к группировкам на круговых орбитах они совпадают с «уолкеровскими системами» (Walker-systems) [11].

Пример расчёта. Дано: $K=3, M_1^*=14, N=12$, тип обзора $F1, \text{ССО}, \varphi=0$.

Найдено: $V=1$, $m_1 = 13/3 \approx 4,333$, $T^*=3461$,
 $l^* = l = 2\pi 233 / T^* \approx 0,422994$, остальные результаты
 содержатся в таблице.

Структура:

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \tau_2 = \frac{4\pi}{3}, \quad \lambda_3 = \frac{4\pi}{3}, \quad \tau_3 = \frac{2\pi}{3}.$$

Из таблицы видна возможность обзора Земли, используя сверхдлинные наборы целевых приборов. На практике их ряд ограничен из-за требования высокоточного поддержания орбит и спутниковой структуры.

Орбиты и структура для многоспутникового двустороннего обзора

На рис. 5 дан пример симметричной K -спутниковой модели двустороннего обзора экватора Земли при $K=3$. Зачернёнными «кружками», «квадратиками» и «треугольничками» изображены нисходящие узлы 1, 2 и 3-го спутников. Пустые «кружки», «квадратики» и «треугольнички» служат восходящими узлами тех же спутников. Модель построена также, как и K -спутниковая односторонняя модель на рис. 4, но число разных узлов здесь вдвое больше. Кроме того, новая модель справедлива только для экватора.

Данная модель условная односпутниковая, образуемая парой векторов

$$\mathbf{R}_1 = X_1 \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_2 = X_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j},$$

как и в предыдущем случае, рассмотренном выше, т. е. для многоспутникового одностороннего обзора при отсутствии требования подтверждения единого времени съёмки для всех спутников. Но с заменой K на $2K$ получаем:

$$V = E(2K \left| \frac{X_2}{X_1} \right|), \quad (73)$$

$$m_1 = y_2 = \frac{M_1 - V}{2K}, \quad (74)$$

$$T^* = X_0^* = 2KX_0 = 2KX_2 + (M_1^* - V)|X_1|, \quad (75)$$

$$e^* = e = 2\pi / T^*. \quad (76)$$

Сводка формул (50) сохраняется и для данной условной односпутниковой модели с заменой T_n , M_1 и T соответственно на t_n , m_1 и T^* .

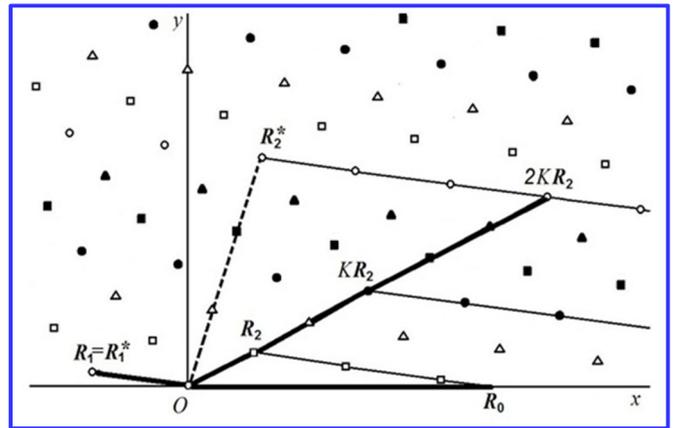


Рис. 5. Модель K -спутникового двустороннего обзора

Формула (29) для расчёта критериев качества обзора здесь имеет вид

$$q_n = 2K B_n \frac{t_n}{T^*}. \quad (77)$$

По рис. 5 находим ещё одно уравнение (с учётом растяжения в $1/e$ раз): $KX_2 = \delta x_0 / e - C|X_1|$, где C – некоторое целое число, а δx_0 определено в (58). Используя (58), $l = |X_1|e$ и (76), найденное уравнение приводится к виду $KX_2 = (T^* - |X_1|) / 2 - C|X_1|$. Подставляя KX_2 в (75), получим

$$C = (M_1^* - 1 - V) / 2. \quad (78)$$

Требование целочисленности C ограничивает свободу выбора K , M_1^* и типа обзора в составе исходных данных для расчёта двустороннего обзора.

Процедура расчёта обзора экватора следующая. **Дано:** число спутников K , 1-й этапный множитель M_1^* , число полос N , тип обзора ($F1$, $F2$, G или GH), наклонение i . Проверяется целочисленность параметра C , определяемого по формуле (78). При нарушении подправляются исходные данные.

Вычисляются:

V , m_1 , T^* , $e^* = e$, B_n , b_n , p_n , $l^* = l$, t_n из (73) – (76) и (50); затем q_n из (77) и высота орбиты h из (34). О выборе наклонения речь пойдёт ниже.

Структура спутниковой системы определяется, как и ранее, на основе формул (52) и (55), но с заменой K на $2K$. Таким путём находим:

$$\lambda_s = \frac{\pi(s-1)}{K}, \quad \tau_s = 2\pi \text{mod} \left(1; (s-1) \frac{(M_1^* - V)(2K - 1)}{2K} \right).$$

Таблица

Примеры расчёта полос обзора p_n (км), периодичностей глобального наблюдения $T_n(t_n)$ (витков) критериев качества q_n периодов изомаршрутности T , высоты h (км) и наклона (град) солнечно-синхронной орбиты для систем одностороннего обзора, состоящих из K спутников

$K = 1$, тип обзора $F1$, $T = 3406$ витков, $h = 689$ км, $98,1^\circ$												
p_n	11,7	23,5	35,2	58,7	94,0	152,7	246,7	399,4	646,1	1046	1692	2737
T_n	3406	2105	1301	804	497	307	190	117	73	44	29	15
q_n	1	1,24	1,15	1,18	1,17	1,17	1,17	1,17	1,18	1,15	1,23	1,03
$K = 1$, тип обзора $F2$, $T = 3351$ витков, $h = 766$ км, $98,4^\circ$												
p_n	11,9	23,9	35,8	59,7	95,5	155,2	250,7	405,9	656,6	1062	1719	2782
T_n	3351	2071	1280	791	489	302	187	115	72	43	29	15
q_n	1	1,24	1,15	1,18	1,17	1,17	1,17	1,17	1,18	1,14	1,25	1,04
$K = 1$, тип обзора G, $T = 2436$ витков, $h = 755$ км, $98,4^\circ$												
p_n	16,4	32,8	49,3	82,1	114,9	197,1	279,2	476,2	673,3	1150	1626	2775
T_n	2436	1427	1009	591	418	245	173	101	72	43	29	15
q_n	1	1,17	1,24	1,21	1,20	1,21	1,21	1,20	1,21	1,24	1,18	1,04
$K = 1$, тип обзора GH, $T = 1456$ витков, $h = 660$ км, $98,0^\circ$												
p_n	27,5	55,0	82,4	137,4	192,4	329,8	467,2	797,0	1127	1924	2721	
T_n	1456	853	603	353	250	147	103	59	44	29	15	
q_n	1	1,17	1,24	1,21	1,20	1,21	1,20	1,17	1,24	1,39	1,02	
$K = 3$, сохраняется единое солнечное время съёмки, тип обзора $F1$, $T = 3793$ витка, $h = 825$ км, $98,7^\circ$												
p_n	10,5	21,1	31,6	52,7	84,3	137,1	221,4	358,5	579,9	938,4		
T_n	1264	781,3	483	298,3	184,7	113,7	71	42,7	28,3	14,3		
q_n	1	1,24	1,15	1,18	1,17	1,17	1,18	1,15	1,23	1,01		
$K = 3$, не сохраняется единое солнечное время съёмки, тип обзора $F1$, $T = 3461$ виток, $h = 614$ км, $97,8^\circ$												
p_n	11,6	23,1	34,7	57,8	92,5	150,3	242,8	393,2	636,0	1029	1665	2694
T_n	1154	713	440,7	272,3	168,3	104	64,3	39,7	24,7	15	9,67	5,33
q_n	1	1,24	1,15	1,18	1,17	1,17	1,17	1,17	1,18	1,16	1,21	1,08

Важно отметить, что получилась не симметричная структура.

Рассмотрим возможности распространения результатов многоспутникового двустороннего обзора экватора на случай глобального наблюдения (с пропуском, быть может, малых участков вблизи полюсов). Вне экватора разноименные (восходящие и нисходящие) ветви трасс ИСЗ расходятся. Это нарушает идеальную картину на рис. 5. Размер расхождения на условной широте u задаётся «функцией расхождения» $v(u)$, вычисляемой по формуле (59). Далее понадобится также и её производная $v'(u)$ по u :

$$v'(u) = \frac{2 \cos i}{\cos^2 u + \sin^2 u \cos^2 i} - \frac{l^*}{\pi} \quad (79)$$

Трасса спутника пересекает экватор вертикально, когда $v'(u)=0$. Тогда

$$i = i_{\text{верт}} = \cos^{-1}(l^*/(2\pi)) \approx 86^\circ, \quad \cos i_{\text{верт}} = l^*/(2\pi). \quad (80)$$

Росту пропусков между разноименными полосами обзора мешает «функция запаса» $w(u) = d(u) - b$. Здесь b – минислед, определяемый из (73) – (76) и (50) для двустороннего обзора экватора, а $d(u)$ – след на условной широте u . С учётом (56) формула (16) для расчёта следа изменяется так:

$$d(u) = \frac{d}{\cos u}, \quad d = \frac{p}{\sin i} - \frac{pl^*}{2\pi \tan i}, \quad (81)$$

где $d = d(0)$ – след на экваторе.

С учётом (81) «функция запаса» принимает вид:

$$w(u) = d / \cos u - b, \quad (82)$$

а её производная по u

$$w'(u) = \frac{d \sin u}{\cos^2 u}, \quad (83)$$

$$w'(0) = 0.$$

Исследуем, нельзя ли при идеальном покрытии экватора, когда $d=b$, добиться полного двустороннего обзора остальных широт. Если наклонение $i < i_{\text{верт}}$, то $v'(u) > 0$, поэтому уже рядом с экватором появятся разрывы между нисходящими полосами слева и восходящими справа. При $i < i_{\text{верт}}$ они возникнут, наоборот, от восходящих полос до нисходящих [10]. Остаётся лишь вариант $i < i_{\text{верт}}$ при котором для сплошного обзора достаточно выполнить условие $w'(u) - v'(u) \geq 0$ на любой широте u . С учётом (83) и (79)

$$w'(u) - v'(u) = \frac{d \sin u}{\cos^2 u} - \frac{2 \cos i}{\cos^2 u + \sin^2 u \cos^2 i} + \frac{l^*}{\pi}.$$

После преобразований с учётом (80), получаем неравенство $w'(u) - v'(u) \geq \frac{d \sin u}{\cos^2 u} - \frac{l^* \sin^2 u}{\pi \cos^2 u}$, откуда вытекает, что для выполнения $w'(u) - v'(u) \geq 0$ при любом значении u достаточно, чтобы $d \geq \frac{l^*}{\pi}$. С учётом (81) это эквивалентно $p \geq \frac{l^* \sin i}{\pi (1 - (l^*)^2 / 4\pi^2)}$.

Пренебрегая ничтожно малой ошибкой, можно упростить это условие так:

$$p \geq \frac{l^*}{\pi}. \quad (84)$$

Итак, глобальное беспропускное двустороннее покрытие Земли обеспечивается с сохранением параметров, полученных для экватора, если ширина полосы обзора удовлетворяет условию (84) при наклонении $i_{\text{верт}}$ [10].

При меньших, чем в (84), полосах для устранения пропусков на высоких широтах (от нисходящих полос слева до восходящих справа), нужно повышать наклонение орбиты, выбирая его в пределах диапазона [10]

$$i_{\text{верт}} < i < \pi/2. \quad (85)$$

Однако рост наклонения приводит к пропускам на низких широтах между восходящими полосами слева и нисходящими справа, устранение которых возможно лишь путём расширения полос обзора для образования их перекрытий на экваторе, создающих запас для недопущения разрывов на других широтах. С учётом запаса для сплошного по-

крытия необходимо и достаточно, чтобы $w(u) + v(u) \geq 0$ и $w(u) - v(u) \geq 0$ при $0 \leq u \leq \pi/2$.

Для выполнения данных условий достаточно решить систему уравнений

$$\begin{aligned} w'(u_1) + v'(u_1) &= 0, & w(u_1) + v(u_1) &= 0, \\ w'(u_2) - v'(u_2) &= 0, & w(u_2) - v(u_2) &= 0. \end{aligned}$$

В развёрнутом виде с учётом (83), (82), (79) и (59) она такова:

$$\frac{d \sin u_1}{\cos^2 u_1} + \frac{2 \cos i}{\cos^2 u_1 + \sin^2 u_1 \cos^2 i} - \frac{l^*}{\pi} = 0; \quad (86)$$

$$\frac{d}{\cos u_1} - b + 2 \tan^{-1}(\tan u_1 \cos i) - \frac{l^* u_1}{\pi} = 0; \quad (87)$$

$$\frac{d \sin u_2}{\cos^2 u_2} - \frac{2 \cos i}{\cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 \cos^2 i} + \frac{l^*}{\pi} = 0; \quad (88)$$

$$\frac{d}{\cos u_2} - b - 2 \tan^{-1}(\tan u_2 \cos i) - \frac{l^* u_2}{\pi} = 0. \quad (89)$$

Здесь b – минислед, найденный для двустороннего покрытия экватора. В его роли при многополосном обзоре выступает b_1 из сводки формул (50). Решая систему (86) – (89), определяются u_1, u_2, i, d ; затем полоса обзора p_1 из (81). Далее по наклонению i и ранее определённом для экватора межвитковому расстоянию l^* вычисляется высота орбиты h из (34).

На практике уже на некоторой широте $u_3 < u_2$, как выявлено в [12], наступает односторонний обзор Земли. Значит, можно попробовать уменьшить найденную полосу обзора, используя не симметричную модель, оставшуюся после удаления всех нисходящих узлов. Здесь действует уравнение

$$\frac{d}{\cos u_3} = S b_1, \quad (90)$$

где целое число S находится по конкретному виду этой модели из условия сплошного одностороннего обзора за время, не большее t_1 для двустороннего покрытия экватора. Например, по рис. 5 $S=3$. Для расчета u_1, u_3, i, d решается система уравнений (86), (87), (90) и (89), где u_2 заменяется на u_3 .

Каждая из остальных полос K -спутникового двустороннего обзора определяется уже при известном наклонении i из пары уравнений (86) и (87).

Литература

1. VISION FOR THE GOS IN 2025. World Meteorological Organization, Commission for Basic Systems, Fourteen Session, Dubrovnik, 25 March – 2 April 2009. – С. 2 – 4.
2. Космический комплекс гидрометеорологического и океанографического обеспечения «Метеор-3М» с космическим аппаратом «Метеор-М» № 1: Научное издание /Под редакцией Л. А. Макриденко, С. Н. Волкова, Ю. В. Трифонова, А. В. Горбунова, В. Н. Дядюченко. – М. : ФГУП «НПП «ВНИИЭМ», 2009. – 142 с.
3. THE SPACED BASED GLOBAL OBSERVING SYSTEM IN 2012 (GOS-2012). Compiled for WMO by V. Biz-zarri. – 2012. – Vol. 1. Satellite programs descriptions.– 188 с.
4. Гусев А. А., Ильина И. Ю., Саульский В. К., Чуркин А. Л. Опыт и перспективы развития космических платформ для космических аппаратов серии «Метеор» // Сборник материалов Всероссийской конференции с международным участием «Применение космических технологий для развития арктических регионов» (КТАР – 2013) / А. А. Гусев и др. – Архангельск, ИПЦ САФУ, 2014. – С. 37 – 45.
5. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн и Т. Корн. – М. : Наука, 1977. – С. 263.
6. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн и Т. Корн. – М. : Наука, 1977. – С. 162 – 165.
7. Можаяев Г. В. Синтез орбитальных структур спутниковых систем. – М. : Машиностроение, 1989 – 304 с.
8. Саульский В. К. Использование «следограмм» для расчёта периодичности землеобзора / В. К. Саульский // Исслед. Земли из космоса. – 1994. – № 2. – С. 65 – 74.
9. Саульский В. К. Метод оптимизации орбит и структуры систем ИСЗ для круглосуточного периодического обзора Земли / В. К. Саульский // Исслед. Земли из космоса. – 1987. – № 1. – С. 111 – 121.
10. Гришин С. Д., Саульский В. Д., Успенский Г. Р. Рациональные орбиты ИСЗ, осуществляющих обзор Земли независимо от солнечного освещения / С. Д. Гришин и др. // Исслед. Земли из космоса. – № 1. – С. 108 – 116.
11. Walker J. G. Some circular orbit patterns providing continuous whole earth coverage / J. G. Walker // J. Brit. Interplanet. Soc. – 1971. – V. 24. – С. 369 – 384.
12. Саульский В. К., Лукашевич Е. Л. Выбор орбит ИСЗ для круглосуточного глобального обзора Земли / В. К. Саульский, Е. Л. Лукашевич // Исслед. Земли из космоса. – 1984. – № 1. – С. 110 – 118.

Поступила в редакцию 17.11.2014

Виктор Константинович Саульский, д-р техн. наук, главный специалист,
т. (495) 623-57-74, e-mail: ntk.vniiem@bk.ru.
(АО «Корпорация «ВНИИЭМ»).

RATIONAL ORBITS FOR THE MULTI-BAND EARTH SCANNING FROM SPACE

V.K. Saulskiy

The task of determining the rational orbit and structure for the satellite system, performing a multi-band earth scanning, by using several on-board camera devices with varying fields of view – is currently being worked out. It is required to provide the high quality view of the specified latitudes' belt for all the devices at once. The observation quality is measured by using the criteria, equal to the quotient of the realizable scanning periodic sequence divided by its minimal peak value, when the swath lateral overlap is absent. Ad hoc method is used in order to complete the objective, under which the dynamic process of covering Earth's random latitude by the satellite swathes is displayed statically in the reference frame: 'Geographical longitude – time point of the satellite crossing the latitude'. It is demonstrated that the objective of the entire article is only completed when the swathes' aspect ratios are numbers of the Fibonacci series. The corresponding formulas have been derived, that allows to perform orbital calculations as well as the structure of the multi-satellite systems, under that condition.

Key words: ascending, descending, swath, multi-band scanning, Fibonacci series, satellite structure, satellite system, multi-satellite, vector model, scanning model, unilateral scanning, bilateral scanning.

References

1. VISION FOR THE GOS IN 2025. World Meteorological Organization, Commission for Basic Systems, Fourteen Session, Dubrovnik, 25 March – 2 April 2009. – P. 2 – 4.

2. Hydrometeorological and oceanographical space complex 'Meteor-3M' and the 'Meteor-M' №1 space craft: Scientific publication / Edited by L. A. Makridenko, S. N. Volkova, I.U.V. Trifonova, A.V. Gorbunova, V.N. Diadiuchenko. – M.: FSUE 'NPP VNIEM', 2009 – 142 p.
3. THE SPACED BASED GLOBAL OBSERVING SYSTEM IN 2012 (GOS-2012). Compiled for WMO by B. Bizzarri. – 2012. – Vol. 1. Satellite programs descriptions. – 188 p.
4. Gusev A. A., Ilina I. IU., Saulskiy V. K., Churkin A. L. Experience and the development perspectives of the mother space vehicles for the 'Meteor' series space crafts // Information package of the International conference 'Application of the space technologies for the development of Arctic Regions' (KTAR – 2013) / A. A. Gusev and others. – Arkhangelsk, ИПЦ (publishing and polygraphic center) of the NARFU, 2014. – P. 37 – 45.
5. Korn G. and Korn T. Math reference book for the research associates and engineers / G. Korn and T. Korn. – M.: Nauka, 1977. – P. 263.
6. Korn G. and Korn T. Math reference book for the research associates and engineers / G. Korn and T. Korn. – M.: Nauka, 1977. – P. 162 – 165
7. Mozhaev G. V. Synthesis of the satellite systems' orbital structures. – M.: Machine industry, 1989 – 304 p.
8. Saulskiy V. K. Utilization of "sledograms" (trace records) for the Earth's scanning frequency calculations / V. K. Saulskiy // Earth and space exploration. – 1994. – № 2. – P. 65 – 74.
9. Saulskiy V. K. Satellite systems structure and orbit optimization method for the 24-hours periodical Earth' scanning / V. K. Saulskiy // Earth and space exploration. – 1987. – № 1. – P. 111 – 121.
10. Grishin S. D., Saulskiy V. D., Uspenskiy G. R. Rational orbits of the satellites, performing Earth's scanning regardless of the insolation / S. D. Grishin and others // Earth and space exploration. – 1983. – № 1. – P. 108 – 116.
11. J. G. Walker J. G. Some circular orbit patterns providing continuous whole earth coverage / J. G. Walker // J. Brit. Interplanet. Soc. – 1971. – V. 24. – P. 369 – 384.
12. Saulskiy V. K., Lukashovich E. L. Satellite orbit selection for the 24-hours global Earth' scanning / V. K. Saulskiy, . E. L. Lukashovich // Earth and space exploration. – 1984. – № 1. – P. 110 – 118.

Viktor Konstantinovich Saulskiy, Ph. D. of Engineering, Senior Specialist
tel.: (495) 623-57-74, e-mail: ntk.vniem@bk.ru.
(JC «VNIEM Corporation»).