

## ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА СПУТНИКОВЫХ СТРУКТУР

А.В. Горбунов, В.К. Саульский

*Рассматриваются односпутниковые и многоспутниковые группировки на круговых орбитах, производящие периодический обзор задаваемых широтных поясов Земли. В качестве критерия для анализа эффективности их функционирования обычно используется максимальный перерыв, возникающий в процессе наблюдения всех точек заданного пояса широт. Такой критерий определяется относительно несложно. Однако лишь функция распределения вероятностей (частот) перерывов может дать полноценное представление о работоспособности системы спутников. В литературе пока отсутствуют способы расчёта подобных функций для многоспутниковых систем со сложной структурой. Поэтому предлагается и подробно объясняется универсальный аналитический метод для определения данной функции. Он базируется на специальной векторной модели многоспутникового обзора Земли. Он пригоден для любых многоспутниковых структур. Метод реализуется в двух вариантах выполнения обзора: для одностороннего обзора, осуществляемого только на восходящих или, наоборот, нисходящих сторонах орбит; для двустороннего обзора на обеих сторонах орбит.*

**Ключевые слова:** векторная модель, след, структура, периодичность, спутник, система спутников, восходящий, нисходящий спутниковый узел, узел орбиты, односторонний, двусторонний.

### Введение

Космические системы периодического наблюдения Земли широко используются во всём мире, включая нашу страну. В будущем их практическое применение должно только расширяться. В связи с этим важное практическое значение имеет полноценный анализ эффективности их использования. В настоящее время в качестве критерия эффективности функционирования подобных систем обычно фигурирует «периодичность» обзора заданной области наблюдения Земли. Под «периодичностью» понимается максимальный перерыв обзора, возникающий для всех точек заданной области. Имеется обширная многолетняя литература, посвящённая различным способам расчёта данного критерия. В частности, можно отметить [1 – 15]. Список подобных источников может быть продолжен. В них рассматриваются различные типы обзора, параметры бортовых съёмочных приборов, характеристики орбит, структура космических группировок, расположение зон наблюдения на поверхности земного шара и т. д. В целом правомерно считать, что проблема расчёта периодичности обзора практически решена.

Однако периодичность, под которой понимается только один, хотя и наибольший перерыв в наблюдениях заданной области Земли, не даёт полноценного представления о работоспособности космической системы. Дело в том, что на каждой широте земного шара и тем более на разных широтах в пределах этой области возникает множество различных перерывов, которые только в совокупности могут использоваться для адекватного исследования эффективности обзора. Определение всех перерывов и частот их появления, а точнее говоря, функции распределения вероятностей (частот) перерывов, является значительно более сложной

проблемой, чем расчёт максимального перерыва. В существующей литературе по тематике космических систем для периодического наблюдения Земли пока отсутствует решение такой задачи.

В настоящей работе излагается метод расчёта упомянутой функции для систем с любой структурой, под которой подразумевается взаимное расположение всех ИСЗ. Единственным ограничением будет то, что все спутники в конкретной системе должны находиться на круговых орбитах с одинаковыми высотами и наклонениями. Это условие всегда соблюдается при обзоре достаточно больших диапазонов широт земного шара.

В основе метода лежит модель обзора Земли, построенная на правилах векторной алгебры [16]. Сначала модель будет описана для односпутникового одностороннего обзора, производимого на восходящих или, напротив, нисходящих сторонах орбит. Затем она доводится до многоспутникового двустороннего обзора, осуществляемого на обеих сторонах орбит.

Векторная модель уже встречалась в несколько ином виде в статье [17], где она помогла решить конкретную задачу поиска орбит и структуры систем многополосного обзора Земли. В настоящей работе, как отмечено выше, акцент сделан на разработке универсального аналитического метода расчёта всех перерывов и частот для одностороннего и двустороннего обзора Земли.

### 1. Модель односпутникового одностороннего обзора

На рис. 1 показана векторная модель односпутникового одностороннего обзора произвольной широты Земли. Модель состоит из «спутниковых узлов», или просто «узлов», изображаемых в координатах: географическая долгота – время. На рис. 1

каждый узел – это кружок, центр которого имеет следующие координаты:  $x$  – долгота точки пересечения широты трассой ИСЗ,  $y$  – момент времени этого пересечения. Долгота задаётся в радианах, а время – в витках орбиты. Через некоторые узлы на рис. 1 проведены отрезки прямых линий, именуемые «следами». Для остальных узлов наличие следов подразумевается, хотя в явном виде они не показаны. След – это участок широты, возникающий в результате её пересечения полосой обзора ИСЗ.

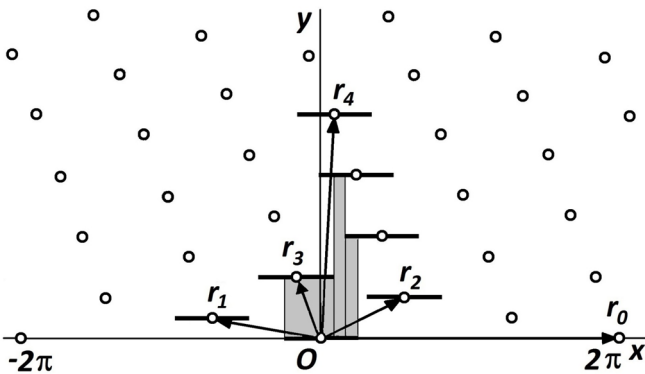


Рис. 1. Модель односпутникового одностороннего обзора

Каждый узел фиксируется своим радиус-вектором  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$ , где  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  – единичные векторы (орты) на осях координат [16]. Начало координат помещается в произвольно выбранный узел, а позиции остальных узлов задаются относительно этого начального. Особую роль среди всех радиус-векторов играют «шаг-векторы»  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ . Первые два из них имеют следующий вид:

$$\mathbf{r}_0 = 2\pi\mathbf{i}; \quad \mathbf{r}_1 = -l\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad (1)$$

где  $l$  – межвитковый сдвиг, вычисляемый по значениям высоты и наклона орбиты. Любой радиус-вектор на рис. 1 может быть выражен, как линейная комбинация (с целочисленными коэффициентами) от векторов  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$ :

$$\mathbf{r} = W\mathbf{r}_0 + Y\mathbf{r}_1. \quad (2)$$

В связи с этим векторы  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$  являются базисными [16]. Здесь и далее целочисленные величины, в частности  $W$  и  $Y$ , обозначаются большими буквами, за исключением номеров и индексов, которые могут записываться большими и маленькими буквами. Вычисляем векторное произведение:

$$\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_1 = 2\pi\mathbf{k}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{k}$  – 3-й единичный вектор, перпендикулярный плоскости координат. Остальные шаг-векторы  $\mathbf{r}_n = x_n\mathbf{i} + Y_n\mathbf{j}$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$  определяются из следующей процедуры:

$$M_n = E(|x_{n-1}/x_n|), \\ \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_{n-1} + M_n\mathbf{r}_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

В (4)  $M_n$  – «этапные множители», функция  $E(c)$  возвращает целую часть аргумента  $c$ , а в качестве начальных векторов фигурируют  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$ , для которых

$$x_0 = 2\pi, Y_0 = 0; \quad x_1 = -l, Y_1 = 1. \quad (5)$$

В соответствии с (2) очередной шаг-вектор может быть выражен так:

$$\mathbf{r}_n = W_n\mathbf{r}_0 + Y_n\mathbf{r}_1, \quad (6)$$

$$W_n = W_{n-1} + M_n W_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad W_0 = 1, \quad W_1 = 0. \quad (7)$$

С ростом номера  $n$  шаг-векторы  $\mathbf{r}_n$  стремятся к оси ординат, а знаки  $s_n$  их абсцисс  $x_n$  чередуются:

$$s_0 = +1, s_1 = -1; \quad s_{n+1} = -s_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Используя (3) – (5), методом математической индукции можно убедиться, что

$$\mathbf{r}_n \times \mathbf{r}_{n+1} = 2\pi s_n \mathbf{k}. \quad (9)$$

Опираясь на свойство (9), можно показать, что очередная пара шаг-векторов  $\mathbf{r}_n$  и  $\mathbf{r}_{n+1}$ , как и два начальных  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$ , также является базисом.

## 2. Анализ перерывов односпутникового одностороннего обзора

Основное достоинство векторной модели состоит в том, что на ней видны сразу все перерывы в обзоре выбранной широты. Точнее говоря, все они имеются над любым следом в виде вертикальных «столбиков», как показано на рис. 1. Высоты «столбиков», являющиеся расстояниями между соседними следами (по вертикали), – это реальные перерывы обзора точек широты. Основание каждого «столбика» состоит из тех точек следа, для ко-

торых очередной перерыв равен высоте этого «столбика». Таким образом, совокупность «столбиков» над следом отображает все перерывы в обзоре широты. Частота каждого перерыва может быть вычислена как частное от деления основания «столбика» на длину  $d(\varphi)$  следа на выбранной широте  $\varphi$ .

При односпутниковом одностороннем обзоре возникает не более трёх перерывов  $t_1, t_2, t_3$  обзора. Можно установить, что с уменьшением длины  $d(\varphi)$  следа наибольший перерыв скачкообразно возрастает в моменты достижения некоторых дискретных значений  $d(\varphi)$ . Все подобные моменты распределяются по этапам с номерами  $n$ , соответствующими шаг-векторам  $\mathbf{r}_n$ , а внутри этапа – по подэтапам с номерами  $m = 1, 2, \dots, M_n$ , где  $M_n$  – очередной этапный множитель, вычисляемый в процедуре (4).

В целом,  $m$ -й подэтап  $n$ -го этапа существует, пока выполняется условие

$$|x_{n-1}| - (m-1)|x_n| \leq d(\varphi) < |x_{n-1}| - (m-2)|x_n|, \quad (10)$$

а перерывы  $t_1(n, m), t_2(n, m), t_3(n, m)$  и их частоты  $f_1(n, m), f_2(n, m), f_3(n, m)$  вычисляются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} t_1(n, m) &= Y_{n-1} + (m-1)Y_n, \\ f_1(n, m) &= 1 - (|x_{n-1}| - m|x_n| + |x_n|) / d(\varphi); \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} t_2(n, m) &= Y_{n-1} + mY_n, \\ f_2(n, m) &= (|x_{n-1}| - m|x_n| + 2|x_n|) / d(\varphi) - 1; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$t_3(n, m) = Y_n, \quad f_3(n, m) = 1 - |x_n| / d(\varphi). \quad (13)$$

Соотношения (10) – (13) позволяют определить все перерывы обзора и их частоты на любой широте, а потому и в пределах заданного пояса широт.

Для наблюдения Земли наиболее удобны «изомаршрутные» орбиты, на которых трассы спутников повторяются через период изомаршрутности  $T$ . На последнем этапе с номером  $n=N$  в результате выполнения процедуры (4)

$$|x_{N-1}| = M_N |x_N|, \quad x_{N+1} = 0.$$

В векторной модели заключительный шаг-вектор имеет вид:  $\mathbf{r}_{N+1} = Y_{N+1} \mathbf{j} = T \mathbf{j}$ , а параметр

$W_{N+1}$ , вычисляемый в процедуре (7), равен количеству суток в периоде изомаршрутности.

Вычисляем векторное произведение двух последних шаг-векторов:

$$\mathbf{r}_N \times \mathbf{r}_{N+1} = s_N |x_N| T \mathbf{k}.$$

Однако на основании (9)  $\mathbf{r}_N \times \mathbf{r}_{N+1} = 2\pi s_N \mathbf{k}$ . Сравнивая с предыдущим равенством, находим, что  $|x_N| = 2\pi / T$ . Вводим новую величину

$$e = |x_N| = 2\pi / T. \quad (14)$$

Используя  $e$ , можно представить абсциссы шаг-векторов в следующем виде:

$$x_n = s_n A_n e. \quad (15)$$

Если выбрать некоторый набор этапных множителей  $M_1, M_2, \dots, M_N$ , то можно выполнить процедуру (4) в сторону уменьшения номеров  $n$ :

$$\mathbf{r}_{n-1} = \mathbf{r}_{n+1} - M_n \mathbf{r}_n, \text{ начиная с векторов } \mathbf{r}_{N+1} \text{ и } \mathbf{r}_N.$$

Для коэффициентов  $A_n$  это означает, что все они могут быть найдены так:

$$\left. \begin{aligned} A_{N+1} &= 0, \quad A_N = 1, \\ A_{N-1} &= M_N, \dots, A_{n-1} = A_{n+1} + M_n A_n, \dots, \\ A_1 &= A_3 + M_2 A_2, \quad A_0 = A_2 + M_1 A_1 = T. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

В частности может быть вычислен межвитковый сдвиг по формуле:

$$l = A_1 e. \quad (17)$$

Ординаты  $Y_n$  по-прежнему удобно определять прямо из процедуры (4):

$$\left. \begin{aligned} Y_0 &= 0, Y_1 = 1, \quad Y_2 = M_1, \dots, \\ Y_{n+1} &= Y_{n-1} + M_n Y_n, \dots, \\ Y_{N+1} &= Y_{N-1} + M_N Y_N = T. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Задавая перечень  $M_1, M_2, \dots, M_N$ , и используя соотношения (14) – (18), можно найти все коэффициенты  $A_n$ , ординаты  $Y_n$ , период изомаршрутности  $T$  и межвитковый сдвиг  $l$ . По величине

сдвига определяется орбита, т. е. её высота при известном наклонении или высота в совокупности с наклонением в случае солнечно-синхронной орбиты.

Все перерывы обзора и их частоты можно вычислить из формул (10) – (13), которые с учётом (15) и (14) удобно преобразовать к следующему виду:

$$A_{n-1} - (m-1)A_n \leq d(\varphi) / e < A_{n-1} - (m-2)A_n, \quad \left. \begin{matrix} m = 1, 2, \dots, M_n; \end{matrix} \right\} (19)$$

$$\left. \begin{matrix} t_1(n, m) = Y_{n-1} + (m-1)Y_n, \\ f_1(n, m) = 1 - (A_{n-1} - (m-1)A_n)e / d(\varphi), \end{matrix} \right\} (20)$$

$$\left. \begin{matrix} t_2(n, m) = Y_{n-1} + mY_n, \\ f_2(n, m) = (A_{n-1} - (m-2)A_n)e / d(\varphi) - 1, \end{matrix} \right\} (21)$$

$$t_3(n, m) = Y_n, \quad f_3(n, m) = 1 - A_n e / d(\varphi). \quad (22)$$

Варьируя наборы этапных множителей, можно получать разные изомаршрутные орбиты, вычисляя для каждой из них перерывы и их частоты по формулам (19) – (22). Тем самым появляется возможность сравнения этих орбит для выбора самой выгодной. Так было сделано в [17] с целью поиска изомаршрутных орбит для многополосного одностороннего обзора Земли. Многополосность означала, что на борту ИСЗ находится ряд съёмочных приборов с разной шириной полос обзора. Требовалось достигнуть равномерно высокого качества наблюдения сразу для всех приборов.

Поставленная цель была достигнута. Оказалось, что на борту ИСЗ можно применять длинный перечень приборов (до 8 – 10 и более), полосы обзора которых кратны числам Фибоначчи [18]. Для всех приборов обеспечивается равномерно высокое качество обзора с периодичностями, близкими к тем значениям, когда нет боковых перекрытий соседних полос обзора. Такой эффект достигается для любого из следующих наборов этапных множителей:

- 1)  $M_2 = M_3 = M_4 = \dots = M_{N-1} = 1, \quad M_N = 2;$
- 2)  $M_2 = 2, \quad M_3 = M_4 = \dots = M_{N-1} = 1, \quad M_N = 2.$

Множитель  $M_1$  зависит от выбора диапазона высот орбит.

### 3. Модель многоспутникового одностороннего обзора

Для всех спутников системы, в которой они находятся на орбитах с одинаковыми высотой и наклонением, возникают одни и те же односторонние векторные модели одностороннего обзора. Для построения из этих моделей многоспутниковой векторной модели они должны быть сдвинуты друг относительно друга в соответствии с различиями в долготах восходящих узлов орбит и позиций спутников вдоль орбит. Сдвиги задаются «векторами сдвига»  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots, \delta_K$ . Здесь  $k$  – номер ИСЗ, а  $K$  – число спутников в системе. Очередной вектор сдвига имеет вид:

$$\delta_k = \delta x_k \mathbf{i} + \delta y_k \mathbf{j}, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

где  $\delta x_k$  и  $\delta y_k$  – сдвиги  $k$ -го спутника относительно 1-го по долготе и времени пересечения широты  $\varphi$ . Очевидно, при  $k = 1$   $\delta x_1 = 0$  и  $\delta y_1 = 0$ . Сдвиги  $\delta x_k$  и  $\delta y_k$  выражаются соответственно в радианах и долях витка. Они отражают спутниковую структуру и могут быть вычислены так:

$$\delta x_k = \lambda_k - l + l \tau_k / (2\pi), \quad \delta y_k = 1 - \tau_k / (2\pi), \quad (23)$$

где  $\lambda_k$  – разность долгот восходящих узлов орбит, а  $\tau_k$  – разность фаз. Обе разности исчисляются в радианах и измеряются от 1-го до  $k$ -го спутника.

В общем случае  $K$ -спутниковая векторная модель существенно сложнее односторонней, но главное свойство векторных моделей, заключающееся в том, что все перерывы обзора состоят из вертикальных интервалов между следами спутников, сохраняется. Для анализа перерывов нужно исследовать  $K$  картин интервалов над следами разных спутников системы.

Между структурой системы спутников и её векторной моделью имеется взаимно однозначное соответствие. В одну сторону: от структуры к модели, эта связь задана формулами (23). Обратные соотношения:

$$\lambda_k = \delta x_k + l \delta y_k, \quad \tau_k = 2\pi(1 - \delta y_k). \quad (24)$$

В (24) допустимо вставлять разности абсцисс  $\delta x_k$  и ординат  $\delta y_k$  от любого узла 1-го ИСЗ до любого узла  $k$ -го ИСЗ, поэтому значения  $\lambda_k$  и  $\tau_k$  могут отличаться на несколько периодов по  $2\pi$  каждый.

Для фиксации этих величин в пределах  $(0, 2\pi)$  можно заменить (24) на следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= \text{mod}(2\pi; \delta x_k + l \delta y_k), \\ \tau_k &= 2\pi \text{mod}(1; -\delta y_k). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Здесь  $\text{mod}(a; b) = a \text{ frac}(1 + \text{frac}(b/a))$ , а функция  $\text{frac}(c)$  возвращает дробную часть своего аргумента  $c$ .

Например,  $\text{mod}(5,2; 13,8)=3,4$ ;  $\text{mod}(5,2; -12,2)=3,4$ ;  $\text{mod}(-5,2; 13,8)=-1,8$ ;  $\text{mod}(-5,2; -12,2)=-1,8$ .

Итак, соотношения (23) и (25) фиксируют взаимно однозначную связь между спутниковой структурой и её векторной моделью.

В формулах (23) – (25) отсутствует широта  $\phi$ . Следовательно, на разных широтах картина узлов сохраняется. Однако длина следа зависит от широты, поэтому результирующие значения перерывов и их частот изменяются.

#### 4. Векторные подмодели и $\beta$ -фрагменты

Для односпутникового одностороннего обзора можно найти все перерывы обзора и их частоты по формулам (10) – (13) или (19) – (22). Для  $K$ -спутниковой структуры, как уже отмечено выше, нужно исследовать  $K$  картин «столбцов» над следами разных спутников.

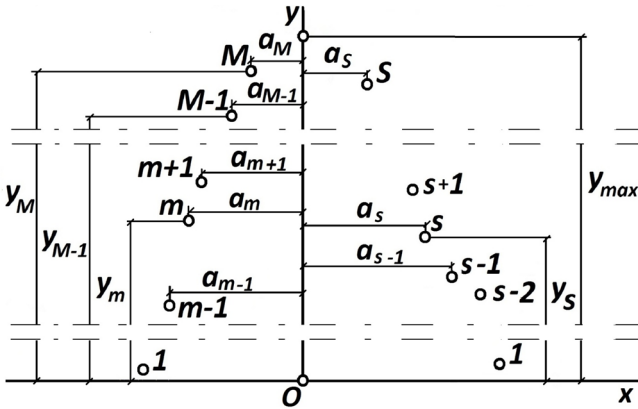


Рис. 2. Подмодель

На рис. 2 дана «подмодель», удобная для анализа всех «столбцов» над следом очередного  $k$ -го спутника. Сами «столбцы» не показаны, поскольку достаточно иметь картину узлов, необходимых для их построения, зная длину следа. Отсутствуют на рис. 2 также и «лишние» узлы, не влияющие на образование «столбцов» над фиксированным следом  $k$ -го спутника, так как они «экранируются» ниже находящимися узлами подмодели. Узлы, рас-

положенные левее оси ординат, составляют «левый» набор с номерами  $1, 2, \dots, m-1, m, \dots, M-1, M$ . Аналогично имеется «правый» набор с номерами  $1, 2, \dots, s-1, s, \dots, S-1, S$ . Будем рассматривать изомаршрутные орбиты. Для них на оси ординат обязательно появится наивысший узел на рис. 2. Выполняются следующие условия при отборе узлов подмодели:

$$a_{m+1} < a_m \wedge y_{m+1} > y_m, \quad a_{s+1} < a_s \wedge y_{s+1} > y_s, \quad (26)$$

где  $a_{m+1}, a_m, a_{s+1}, a_s$  – абсолютные величины абсцисс узлов подмодели.

Подмодель строится из « $\beta$ -фрагментов». Для очередной  $k$ -й подмодели их количество равно числу спутников  $K$ . Для неё очередной  $\beta$ -фрагмент образуется над узлом  $k$ -го спутника и состоит из узлов  $t$ -го спутника, удовлетворяющих условиям (26). Пример построения  $\beta$ -фрагмента дан на рис. 3. Узлы  $t$ -го спутника здесь изображены маленькими треугольниками. Они снабжены номерами от 1 до 10. Двумя кружками показаны узлы  $k$ -го спутника, обозначенные буквами  $O$  и  $T$ .

Вектор сдвига от односпутниковой модели  $k$ -го ИСЗ до аналогичной модели  $t$ -го ИСЗ имеет вид:

$$\delta_{k,t} = \delta x_{k,t} \mathbf{i} + \delta y_{k,t} \mathbf{j}, \quad (27)$$

где  $\delta x_{k,t} = \delta x_t - \delta x_k, \quad \delta y_{k,t} = \delta y_t - \delta y_k,$

Узлы  $\beta$ -фрагмента фиксируются  $\beta$ -векторами, которые на рис. 3 в явном виде не показаны. Очередной вектор  $\beta_{n,p}$  записывается в следующем виде:

$$\beta_{n,p} = x_{n,p} \mathbf{i} + y_{n,p} \mathbf{j}. \quad (28)$$

Начальный вектор  $\beta_{0,0}$  должен удовлетворять следующим требованиям:

$$-2\pi < x_{0,0} \leq 0, \quad 0 < y_{0,0} \leq 1. \quad (29)$$

Для определения  $\beta_{0,0}$  сначала находим вспомогательный вектор  $\gamma$ :

$$\gamma = x_\gamma \mathbf{i} + y_\gamma \mathbf{j} = \delta_{k,t} - D(\delta y_{k,t} - 1) \mathbf{r}_1, \quad (30)$$

где функция  $D(z)$  равна целому числу, ближайшему сверху к аргументу  $z$ .

Например,  $D(5,6)=6, \quad D(-5,6)=-5$ . Вычисляем  $\beta_{0,0}$  и 2-й – вектор  $\beta_{1,0}$ :

$$\beta_{0,0} = \gamma - D(x_\gamma) \mathbf{r}_0, \quad \beta_{1,0} = \beta_{0,0} + \mathbf{r}_0. \quad (31)$$

Получаем все остальные  $\beta$ -векторы из следующей рекуррентной процедуры:

$$\begin{aligned} \beta_{1,p} &= \beta_{1,0} + p\mathbf{r}_1, \quad p=1,2,\dots,E(|x_{1,0}/x_1|), \\ \beta_{2,0} &= \beta_{1,0} + (E(|x_{1,0}/x_1|)+1)\mathbf{r}_1; \\ \beta_{2,p} &= \beta_{2,0} + p\mathbf{r}_2, \quad p=1,2,\dots,E(|x_{2,0}/x_2|), \\ \beta_{3,0} &= \beta_{2,0} + (E(|x_{2,0}/x_2|)+1)\mathbf{r}_2; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \beta_{n,p} &= \beta_{n,0} + p\mathbf{r}_n, \quad p=1,2,\dots,E(|x_{n,0}/x_n|), \\ \beta_{n+1,0} &= \beta_{n,0} + (E(|x_{n,0}/x_n|)+1)\mathbf{r}_n. \end{aligned}$$

Шаг-векторы  $\mathbf{r}_n$  вычисляются из (4) и (5). Вся процедура завершается, когда  $y_{n,p} > T$ , где  $T$  – период изомаршрутности (33).

На рис. 3 по условию (33) последним стал узел 9, так как узел 10 имеет ординату больше  $T$  (он «кранируется» узлом 2). По условиям (26) отсеиваются узлы 3, 5, 6, 8. Итоговый  $\beta$ -фрагмент состоит из узлов 1, 2, 4, 7, 9 и ещё нескольких, фиксируемых векторами  $\beta_{1,p}$ , не уместившимися на рис. 3.

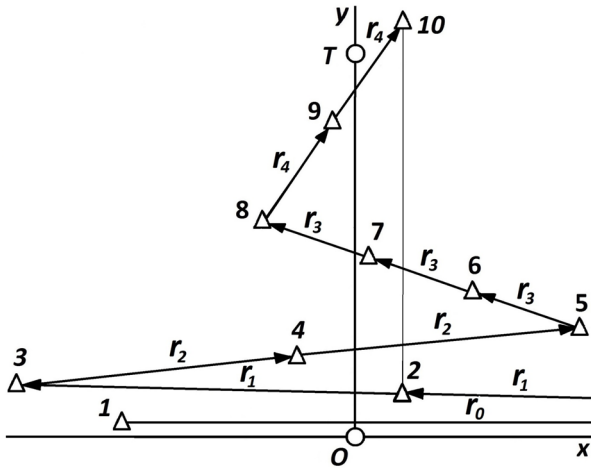


Рис. 3. Построение  $\beta$ -фрагмента

Особый вариант  $\beta$ -фрагмента существует при  $t=k$ . Ввиду (27),  $\delta x_{k,k} = \delta y_{k,k} = 0$ . Процедура (30) – (32) действует в следующем упрощённом виде:

$$\begin{aligned} \beta_{0,0} &= \mathbf{r}_1; \\ \beta_{1,p} &= \mathbf{r}_0 + (p+1)\mathbf{r}_1, \quad p=0, 1, 2, \dots, M_1-1; \\ \beta_{2,p} &= \mathbf{r}_1 + (p+1)\mathbf{r}_2, \quad p=0, 1, 2, \dots, M_2-1; \\ \beta_{n,p} &= \mathbf{r}_{n-1} + (p+1)\mathbf{r}_n, \quad p=0, 1, 2, \dots, M_n-1; \\ \beta_{N,p} &= \mathbf{r}_{N-1} + (p+1)\mathbf{r}_N, \quad p=0, 1, 2, \dots, M_N-1. \end{aligned} \quad (34)$$

Значения  $M_n$  находятся из (4). Конечный вектор  $\beta_{N,M_N-1} = \mathbf{r}_{N+1} = T\mathbf{j}$ .

В каждом  $\beta$ -фрагменте «левый» набор узлов фиксируется векторами  $\beta_{0,0}, \beta_{2,p}, \beta_{4,p}, \dots$ , а «правый» – векторами  $\beta_{1,0}, \beta_{3,p}, \beta_{5,p}, \dots$ . Для дальнейшего построения  $k$ -й подмодели нужно объединить все её  $\beta$ -фрагменты и отбраковать «лишние» узлы по условиям (26).

В частности, можно рекомендовать следующий способ. Сначала нужно объединить по отдельности все левые и правые наборы с упорядочиванием по росту их ординат. При равенстве ординат у двух и более узлов сразу отбрасываются узлы с наибольшими абсолютными значениями абсцисс. Затем последовательно перебирая упорядоченные наборы в сторону роста ординат, отсеиваются те узлы, для которых предыдущие, т. е. лежащие ниже, имеют меньшую или равную абсолютную величину абсциссы. В итоге получается картина узлов на рис. 2, удовлетворяющая неравенствам (26).

### 5. Анализ перерывов многоспутникового одностороннего обзора

Для каждой  $k$ -й подмодели, пример которой дан на рис. 3, можно найти условные вероятности (частоты) всех перерывов, возникающих после события попадания точки широты  $\varphi$  в след  $k$ -го спутника системы из  $K$  ИСЗ. Вероятность такого события равна  $1/K$ .

Точнее говоря, данная вероятность соответствует частоте попадания произвольной точки Земли в след конкретного  $k$ -го спутника системы, если произошло событие наблюдения этой точки.

Состав перерывов зависит от длины  $d(\varphi)$  следа. Найдём вероятность того, что вслед за данным событием наступил перерыв, измеряемый ординатой  $y_m$  узла  $m$  подмодели на рис. 2. Несложно убедиться, что данный перерыв возникает, если длина следа  $d(\varphi)$  находится в следующих пределах:

$$a_m \leq d(\varphi) \leq a_{m-1} + a_s. \quad (35)$$

При этом возможны три варианта:

$$\left. \begin{aligned} 1) & a_m \leq d(\varphi) \leq \min(a_m + a_s, a_{m-1}); \\ 2) & \min(a_m + a_s, a_{m-1}) \leq d(\varphi) \leq \\ & \leq \max(a_m + a_s, a_{m-1}); \\ 3) & \max(a_m + a_s, a_{m-1}) \leq d(\varphi) \leq a_{m-1} + a_s. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Эти варианты по очереди проиллюстрированы на рис. 4 – 6. На них представлен один и тот же участок подмодели при разной длине  $d(\varphi)$  следов. Показаны три узла, обозначенные  $m, m-1, s$ , влияющие на образование перерыва  $y_m$ . Горизонтальные отрезки, проходящие через узлы, как обычно, изображают следы спутников на широте  $\varphi$ . Затенённые «столбики» имеют высоту  $y_m$ , а их основания соответствуют участкам следа, над которыми появляется этот перерыв. Отношения длин этих участков к длине следа равны частотам перерыва  $y_m$ , возникающего после пересечения широты  $\varphi$  полосой обзора  $k$ -го спутника, для которого построена подмодель. Для определённости на рис. 4 – 6 считается, что  $a_{m-1} \leq a_m + a_s$ .

Как можно установить по данным рисункам, частота  $f_m$  перерыва  $y_m$  в первом из вариантов (36) вычисляется так:  $f_m = (d(\varphi) - a_m) / d(\varphi)$ ,

во втором варианте:

$$f_m = (\min(a_m + a_s, a_{m-1}) - a_m) / d(\varphi),$$

а в третьем варианте:  $f_m = (a_{m-1} + a_s) / d(\varphi) - 1$ .

Объединяя эти частные формулы, получаем общую формулу, справедливую при выполнении условия (35):

$$f_m = 1 - \max \left( a_m / d(\varphi), 1 - a_s / d(\varphi) \right) - \left. \begin{array}{l} \\ - \max (1 - a_{m-1} / d(\varphi), 0) . \end{array} \right\} \quad (37)$$

Выше рассматривался левый набор узлов. Для правого набора формулы (35) – (37) остаются в силе с заменой нижних индексов на рис. 2: вместо  $m, m-1, s$  требуется вставить соответственно  $s, s-1, m-1$ . В результате вместо (35) получаем следующее условие существования перерыва  $y_s$  для подмодели на рис. 2:

$$a_s \leq d(\varphi) \leq a_{s-1} + a_{m-1}. \quad (38)$$

Соответствующая ему формула для расчёта частоты  $f_s$ , заменяющая соотношение (37), принимает вид:

$$f_s = 1 - \max \left( a_s / d(\varphi), 1 - a_{m-1} / d(\varphi) \right) - \left. \begin{array}{l} \\ - \max (1 - a_{s-1} / d(\varphi), 0) . \end{array} \right\} \quad (39)$$

Отдельно нужно рассмотреть случай перерыва  $y_{ms} = y_m = y_s$ , возникающего, если

$$\min(a_m + a_s) \leq d(\varphi) \leq a_{m-1} + a_{s-1}. \quad (40)$$

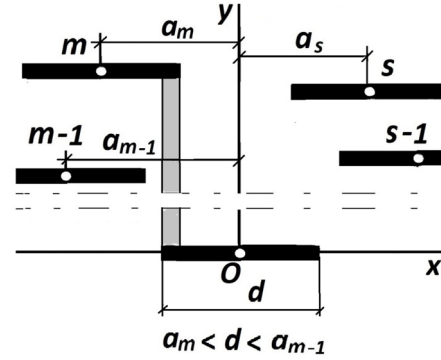


Рис. 4. Первый вариант расчёта частоты  $f_m$  перерыва  $y_m$

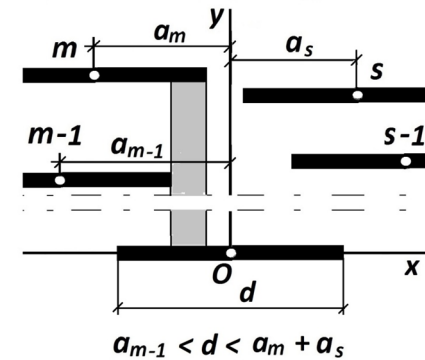


Рис. 5. Второй вариант расчёта частоты  $f_m$  перерыва  $y_m$

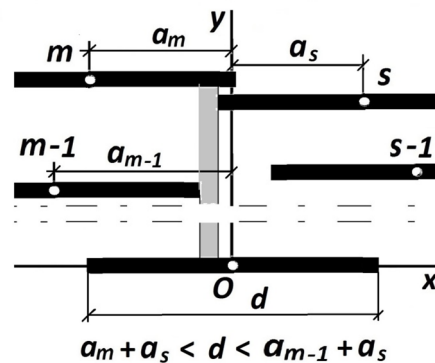


Рис. 6. Третий вариант расчёта частоты  $f_m$  перерыва  $y_m$

Для вычисления частоты  $f_{ms}$  перерыва  $y_{ms}$  действует следующая формула, справедливая, как можно непосредственно убедиться, при любом значении следа  $d(\varphi)$ :

$$f_{ms} = \left. \begin{aligned} & \min (\max (1 - a_m / d(\varphi), 0) + \\ & + \max (1 - a_s / d(\varphi), 0), 1) - \\ & - \min (\max (1 - a_{m-1} / d(\varphi), 0) + \\ & + \max (1 - a_{s-1} / d(\varphi), 0), 1). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Если условие (40) не выполнено, эта формула даёт значение  $f_{ms}=0$ .

В случае малых размеров следов  $d(\varphi)$  возможны бесконечно большие перерывы при обзоре некоторых участков широты  $\varphi$ , т. е. сплошной обзор не обеспечивается. Для недопущения этого должно проверяться выполнение следующего неравенства, которое несложно получить по рис. 2:

$$\max(a_M, a_S) \leq d(\varphi), \quad (42)$$

где номерами  $M$  и  $S$  обозначены наивысшие узлы соответственно левого и правого наборов узлов на рис. 2, расположенные ближе всех к оси ординат.

При известной длине  $d(\varphi)$  следа можно, используя формулы (35) – (41), найти условные вероятности всех перерывов  $k$ -й подмодели.

Затем можно найти функцию распределения частот перерывов для  $K$ -спутниковой системы на широте  $\varphi$  путём объединения этих условных вероятностей по всем  $K$  подмоделям с множителями  $1/K$ . Далее можно найти общую функцию распределения частот перерывов для заданного широтного пояса путём интегрирования функций для всех широт в пределах этого пояса (с учётом относительной длины широт).

Именно эта функция, а не наибольший перерыв, не вполне корректно именуемый «периодичностью», даёт истинную картину обзора. Однако для практического применения данной функции нужно предложить и обосновать критерий обзора, учитывающий весь набор перерывов  $y_m$  и их частоты  $f_m$ .

На эту роль можно предложить «эффективный перерыв»  $y_{эф}$ , вычисляемый по одной из следующих альтернативных формул:

$$y_{эф} = \sqrt{\sum_{m=1}^{m_{\max}} y_m^2 f_m},$$

$$y_{эф} = \left( \sum_{m=1}^{m_{\max}} y_m^2 f_m \right) / \left( \sum_{m=1}^{m_{\max}} y_m f_m \right).$$

Вторая формула даёт более высокие значения  $y_{эф}$ , т. е. она более чувствительна к неравномерности состава перерывов обзора.

Обоснование выбора рекомендуемой формулы для расчёта  $y_{эф}$  должно стать темой отдельной статьи.

## 6. Анализ перерывов многоспутникового двустороннего обзора

Векторная модель двустороннего обзора широты  $\varphi$  получается путём объединения двух одинаковых односторонних моделей, одна из которых соответствует восходящим, а другая нисходящим сторонам орбит спутников. Нисходящая смещается относительно восходящей на «вектор перехода»  $\delta(\varphi)$ . Он определяется, используя формулы сферической тригонометрии [1]:

$$\delta(\varphi) = (\pi - l / 2 - \nu(\varphi)) \mathbf{i} + (0,5 - \tau(\varphi)) \mathbf{j},$$

где  $\nu(\varphi) = 2 \sin^{-1}(\operatorname{tg} \varphi / \operatorname{tg} i) - l \sin^{-1}(\sin \varphi - \sin i) / \pi$ ,

$$\tau(\varphi) = \sin^{-1}(\sin \varphi / \sin i) / \pi.$$

Здесь  $i$  – наклонение орбиты,  $l$  – межвитковый сдвиг.

Как и в разделах 4 и 5, для определения всех перерывов и их частот (на широте  $\varphi$ ) нужно найти все подмодели с  $\beta$ -фрагментами. Смысл этих понятий сохраняется, но число подмоделей растёт вдвое за счёт добавления «нисходящих» подмоделей (над нисходящими узлами на той же широте).

Для  $k$ -й «восходящей» подмодели, построенной над восходящим узлом  $k$ -го спутника, возникает  $2K$  следующих  $\beta$ -фрагментов:

- $K$   $\beta$ -фрагментов с векторами сдвига  $\delta_{k,t}$  для двухспутниковых моделей, где обе исходные односпутниковые модели являются восходящими;

- $K$   $\beta$ -фрагментов с суммарными векторами смещения  $\delta_{k,t} + \delta(\varphi)$  для двухспутниковых моделей, где 1-я модель – восходящая, а 2-я – нисходящая.

Для  $k$ -й «нисходящей» подмодели также имеется  $2K$   $\beta$ -фрагментов:

- $K$   $\beta$ -фрагментов с векторами сдвига  $\delta_{k,t}$  для двухспутниковых моделей, где обе исходные односпутниковые модели являются нисходящими;

- $K$   $\beta$ -фрагментов с векторами смещения в виде разностей  $\delta_{k,t} - \delta(\varphi)$  для двухспутниковых моделей, где 1-я модель – нисходящая, а 2-я – восходящая.

Вероятность реализации каждой подмодели одна и та же и равна  $1/(2K)$ .

Все процедуры и формулы разделов 4 и 5, полученные для построения подмоделей и  $\beta$ -фрагментов, расчёта перерывов и их частот, а также «эф-



фективного перерыва», сохраняются и для многоспутникового двустороннего обзора с учётом добавлений, сделанных в настоящем разделе.

### Выводы

1. Разработан аналитический метод расчёта функции распределения вероятностей (частот) перерывов обзора, возникающих в процессе функционирования произвольной многоспутниковой системы, производящей периодическое наблюдение задаваемой области Земли с помощью бортовой съёмочной аппаратуры.

2. Данная функция обеспечивает наиболее полноценный анализ эффективности космических мониторинговых систем в отличие от обычно используемого и достаточно просто определяемого значения «периодичности» обзора, под которым подразумевается один максимальный перерыв среди всех промежутков времени, возникающих в процессе наблюдения различных участков заданной области земного шара.

3. С целью практического применения рассматриваемой функции для оптимизации параметров мониторинговых космических систем предложены два варианта вычисления на её основе «эффективного перерыва», служащего критерием эффективности выполнения обзора.

4. Разработанный метод сначала излагается для более простого случая «одностороннего» обзора, реализуемого только на одной стороне орбиты: восходящей или нисходящей, а затем распространяется на двусторонний обзор, производимый на обеих сторонах орбиты.

5. В основе предлагаемого метода лежит специальная «векторная модель» обзора Земли.

### Литература

1. Баринов К. Н., Бурдаев М. Н., Мамон П. А. Динамика и принципы построения орбитальных систем космических аппаратов / К. Н. Баринов и др. – М. : Машиностроение, 1975. – 232 с.
2. Гришин С. Д., Журавлёв И. Ф., Лисовой В. Т., Саульский В. К., Суриков В. М. Выбор орбит ИСЗ для исследования природных ресурсов Земли / С. Д. Гришин и др. // Космические исследования земных ресурсов : [Сборник]. – М. : Наука, 1976. – С. 310 – 316.
3. Рамм Н. С., Кузина А. М., Мальцева И. Г. Параметры орбит и датчиков системы ИПРЗ / Н. С. Рамм и др. // Исследования Земли из космоса. – 1980. – № 2. – С. 62 – 69.
4. Бобронников В. Т., Шубин В. И. Метод решения задачи о построении сети ИСЗ для периодического обзора

земной поверхности / В. Т. Бобронников, В. И. Шубин // Тр. XV чтений К. Э. Циолковского. Механика космического полёта. – М. : Наука, 1981. – С. 52 – 58.

5. Асташкин А. А., Саульский В. К., Успенский Г. Р. Исследование орбит ИСЗ океанографического назначения / А. А. Асташкин и др. // Исследования Земли из космоса. – 1981. – № 2. – С. 111 – 115.

6. Гришин С. Д., Саульский В. К., Успенский Г. Р. Рациональные орбиты ИСЗ, осуществляющих обзор Земли независимо от солнечного освещения / С. Д. Гришин и др. // Исследования Земли из космоса. – 1983. – № 1. – С. 108 – 116.

7. Гутенев А. А., Можаяев Г. В. К расчёту периодичности обзора Земли кинематически симметричными системами спутников / А. А., Гутенев, Г. В. Можаяев. – М. : 1983. – 24 с. Депонировано в ВИНТИ 12.04.83 № 1926 – 83.

8. Саульский В. К., Лукашевич Е. Л. Выбор орбит ИСЗ для круглосуточного глобального обзора Земли / В. К. Саульский, Е. Л. Лукашевич // Исследования Земли из космоса. – 1984. – № 1. – С. 110 – 118.

9. Можаяев Г. В. Синтез орбитальных структур спутниковых систем / Г. В. Можаяев. – М. : Машиностроение, 1989. – 304 с.

10. Лебедев А. А., Нестеренко О. П. Космические системы наблюдения: синтез и моделирование / А. А. Лебедев, О. П. Нестеренко. – М. : Машиностроение, 1991. – 223 с.

11. Бырков Б. П., Разумный Ю. Н. Аналитическая методика определения периодичности обзора Земли спутниками системы ИПРЗ / Б. П. Бырков, Ю. Н. Разумный // Исследования Земли из космоса. – 1992. – № 2. – С. 91 – 97.

12. Саульский В. К. Использование «следограмм» для расчета периодичности землеобзора / В. К. Саульский // Исследования Земли из космоса. – 1994. – № 2. – С. 65 – 74.

13. Лысенко Л. Н., Парфенов С. В. Оптимизация низкоорбитальных спутниковых систем периодического обзора / Л. Н. Лысенко, С. В. Парфенов // Полёт. – № 2. – 1998. – С. 31 – 39.

14. Малышев В. В., Красильщиков М. Н. и др. Спутниковые системы мониторинга / В. В. Малышев, М. Н. Красильщиков и др. – М. : Изд-во МАИ, 2000. – 568 с.

15. Разумный Ю. Н. Синтез орбитальных структур спутниковых систем периодического обзора / Ю. Н. Разумный. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.

16. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. : Наука, 1977.

17. Саульский В. К. Векторный метод синтеза орбит и структуры систем спутников для многополосного периодического обзора Земли / В. К. Саульский // Космические исследования. – 2016. – № 3 (в печати).

18. Ribenboim P. The New Book of Prime Number Records. – Springer, 1996.

Поступила в редакцию 10. 12. 2015

*Александр Викторович Горбунов*, канд. техн. наук,  
заместитель генерального директора, т. (495) 623-41-81.  
*Виктор Константинович Саульский*, д-р техн. наук,  
главный специалист, т. (495) 623-57-74,  
e-mail: ntk.vniiem@bk.ru.  
(АО «Корпорация «ВНИИЭМ»).

## VECTOR METHOD for ANALYSIS of SATELLITE SYSTEMS

A.V. Gorbunov, V.K. Saulsky

*Mono- and multi-satellite constellations, which operate on circular orbits and perform monitoring of desired Earth's latitudinal zones, are considered in the article. Maximum interval during observation of all points in specified latitudinal zone is usually used as a parameter for analysis of their effectiveness. This parameter can be determined quite easily. But only probability-distribution function (i.e. frequency function) of intervals could give full understanding of satellite system performance. Today no methods for calculation of such functions in multi-satellite systems with sophisticated structure could be found in the literature. Thereof in this article a universal analytical method for calculation of this function is offered and considered in details. It is based on a special vector model of multi-satellite Earth observation. It can be used for all multi-satellite systems. The method is implemented using two alternative observation schemes: one-branch observation performed only during ascending or only during descending branches; bi-branch observation performed during both orbit branches.*

**Key words:** vector model, trace, system, intervals, satellite, satellite system, ascending, ascending satellite node, orbit node, one-branch, bi-branch.

### List of References

1. Barinov K. N., Burdayev M. N., Mamon P. A. Dynamics and Design Concepts for Orbital Spacecraft Systems / K. N. Barinov at al. – Moscow: Mashinostroyeniye [Mashine-Building Industry] Publ., 1975. – P. 232.
2. Grishin S. D., Zhuravlev I. F., Lisovoy V. T., Saulsky V. K., Surikov V. M. Selecting of Orbits for Artificial Earth Satellites Designed for Earth's Natural Resources Observation / S. D. Grishin at al. / Space Studies of Earth's Resources: [Collected Book]. – Moscow : Nauka [Science] Publ., 1976. – P. 310 – 316.
3. Ramm N. S., Kuzina A. M., Maltseva I. G. Orbital Parameters and Characteristics of IPRZ [Earth's Natural Resources Observation] System Sensors / S. N. Ramm at al. // Issledovanie Zemli iz Kosmosa [Earth Exploration from Space] Jour. – 1980. – No. 2. – Pp. 62 – 69.
4. Bobronnikov T. V., Shubin V. I. Method for Developing a SC System for Earth's Surface Monitoring // T. V. Bobronnikov, V. I. Shubin // Works of 15<sup>th</sup> K. E. Tsiolkovsky Readings. Space-Flight. – Moscow : Nauka [Science], 1981. – Pp. 52 – 58.
5. Astashkin A. A., Saulsky V. K., Uspensky G. R. Investigation of Oceanographical SC Orbits / A. A. Astashkin at al. // Earth Space Exploration. – 1981. – No. 2. – Pp. 111 – 115.
6. Grishin S. D., Saulsky V. K., Uspensky G. R. Rational Orbits of Artificial Earth's Satellite Performing Earth Observation Without Regard to Sunshine / D. S. Grishin at al. // Issledovanie Zemli iz Kosmosa [Earth Exploration from Space] Jour. – 1983. – No. 1. – Pp. 108 – 116.
7. Gutenev A. A., Mozhayev G. V. About Calculation of Earth Monitoring Intervals Performed by a Kinematically Symmetrical Satellite System / A. A. Gutenev, G. V. Mozhayev. – Moscow, 1983. – P. 24. – Deposited in VINITI [Russian Institute for Scientific and Technical Information] on April 12, 1983, No. 1926 – 83.
8. Saulsky V. K., Lukashovich E. L. Selection of Artificial Earth's Satellite Orbits for Global Round-the-Clock Earth Monitoring / V. K. Saulsky, E. L. Lukashovich // Issledovanie Zemli iz Kosmosa [Earth Exploration from Space] Jour. – 1984. – No. 1. – Pp. 110 – 118.
9. Mozhayev G. V. Creation of Satellite System Orbital Configurations / G. V. Mozhayev. – Moscow : Mashinostroyeniye [Mashine-Building Industry] Publ., 1989. – P. 304.
10. Lebedev A. A., Nesterenko O. P. Space Observation Systems: Creation and Modeling / A. A. Lebedev, O. P. Nesterenko. – Moscow : Mashinostroyeniye [Mashine-Building Industry] Publ., 1991. – P. 223.
11. Byrkov B. P., Razumny Yu. N. Analytical Method for Determination of Earth Monitoring Periodicity for IPRZ [Earth's Natural] // Issledovanie Zemli iz Kosmosa [Earth Exploration from Space] Jour. – 1992. – No. 2. – Pp. 91 – 97.
12. Saulsky V. K. "Using "Track-Diagrams" for Earth Monitoring Interval Calculation / V. K. Saulsky // Issledovanie Zemli iz Kosmosa [Earth Exploration from Space] Jour. – 1994. – No. 2. – Pp. 65 – 74.
13. Lysenko L. N., Parfenov S. V. Improvement of Low-Orbit Satellite Systems Used for Periodical Observation / L. N. Lysenko, S. V. Parfenov // Polyot [Flight] Jour. – No. 2. – 1998. – Pp. 31 – 39.
14. Malyshev V. V., Krasilshchikov M. N. at al. Monitoring Satellite Systems / V. V. Malyshev, M. N. Krasilshchikov at al. – Moscow : MAI [Moscow Aviation Institute] Publ., 2000. – P. 568.

15. Razumny Yu. N. Creation of Orbital Configurations for Monitoring Satellite Systems / Yu. N. Razumny. – Moscow : Publishing House of Moscow State Technical University Named After N. E. Bauman. – 2000.
16. Korn G. & Korn T. Reference Mathematics Guide for Scientists and Engineers. – Moscow : Nauka [Science], 1977.
17. Saulsky V. K. Vector Method for Creation of Orbits and Configuration of Satellite Systems for Multi-Band Earth Monitoring / V. K. Saulsky // Cosmic Research [Kosmicheskie Issledovaniya] Jour. – 2016. – No. 3 (in print).
18. Ribenboim P. The New Book of Prime Number Records. – Springer, 1996.

**Alexandr Victorovich Gorbunov,**

*Ph. D. in Engineering Science, Deputy Director General.*

*Tel.: (495) 623-41-81.*

**Victor Konstantinovich Saulsky,**

*D. Sc. in Engineering, Chief Specialist,*

*Tel.: (495) 623-57-74.*

*E-mail: ntk.vniiem@bk.ru.*

*(JC 'VNIEM Corporation').*