

## О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ИЗОБРАЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О СТАЦИОНАРНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГРОЗОВОГО ОБЛАКА С ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ

В. В. Хегай, В. П. Ким, А. В. Карелин

*Представлены расчёты вертикальной компоненты электростатического поля  $E_z$ , обусловленной стационарным электрическим взаимодействием грозового облака с поверхностью Земли, когда молниевые разряды «облако – земля» или «облако – облако» отсутствуют. Расчёты вертикального электростатического поля, возникающего на поверхности Земли в результате стационарного электрического взаимодействия грозового облака с поверхностью Земли, которые выполнены методом изображений в пренебрежении электрической проводимостью атмосферы и с её учётом на основе решения уравнения непрерывности электрического тока, показывают, что оба подхода дают практически эквивалентные результаты. Тем не менее, в области существенных значений вертикальной компоненты поля  $E_z$  на поверхности Земли (с радиусом  $r$  порядка нескольких километров), вертикальная компонента поля  $E_z^i$ , полученная методом изображений, оказывается меньше. Максимальное различие, которое составляет почти 13%, достигается непосредственно под облаком и соответствует положению вертикальной проекции на поверхность Земли положительного и отрицательного зарядов, которыми моделируется грозовое облако (т. е. при  $r = 0$ ).*

**Ключевые слова:** грозовое облако, электростатическое поле, метод изображений, проводимость атмосферы, уравнение непрерывности электрического тока.

### Введение

Одним из главных источников атмосферного электричества являются электродвижущие силы (ЭДС), вызывающие разделение электрических зарядов внутри грозовых облаков и тем самым определяющие электрическую структуру грозового облака. Природа этих ЭДС остаётся предметом экспериментальных и теоретических исследований, в частности её описание дано в [1 – 3]. Электрические заряды грозового облака непрерывно взаимодействуют с окружающей их проводящей атмосферой и поверхностью Земли. В результате этого взаимодействия и выпадения заряженных частиц осадков Земля в целом приобретает отрицательный электрический заряд величиной  $\sim -5,7 \cdot 10^5$  Кл со средней поверхностной плотностью заряда  $\sim -1,1 \cdot 10^{-9}$  Кл/м<sup>2</sup>, при этом в условиях ясной погоды средняя величина напряжённости направленного вниз электростатического поля равна  $\sim 130$  В/м [4]. Прямое электрическое взаимодействие грозового облака с поверхностью Земли имеет три компонента [5]: молниевые разряды, коронные разряды на остриях и обычные квазистационарные ламинарные токи проводимости (этот тип взаимодействия мы будем называть в дальнейшем стационарным электрическим взаимодействием). Традиционно при модельных оценках распределения электростатического поля и плотности зарядов на поверхности Земли, обусловленных её стационарным электрическим взаимодействием с грозовым облаком, пренебрегается проводимостью атмосферы и используется метод изображений [4, 6].

В настоящей работе проведено сравнение результатов моделирования стационарного электри-

ческого взаимодействия грозового облака с поверхностью Земли, полученных методом изображений и на основе решения уравнения непрерывности для плотности электрического тока в проводящей атмосфере.

### Постановка задачи и расчётные формулы

Для моделирования грозового облака выберем наиболее упрощённую его модель. В соответствии с простейшей моделью грозового облака, его электрическую структуру можно представить двумя объёмными зарядами одинаковой величины, но противоположного знака, с положительным зарядом в верхней части облака и отрицательным зарядом в нижней (см., например, [7]). Типичное грозовое облако обычно простирается по высоте от  $2 \div 3$  до  $8 \div 12$  км, а величина каждого заряда по абсолютной величине составляет  $5 \div 25$  Кл.

Выберем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$  с вертикальной осью  $z$ , проходящей через центры зарядов облака и началом координат, размещённым на поверхности Земли ( $r = 0, z = 0$ , рис. 1).

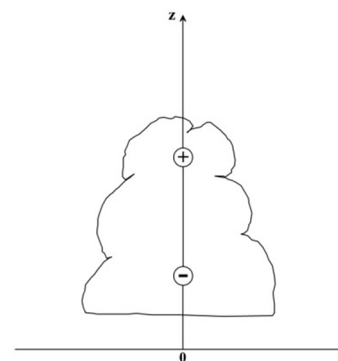


Рис. 1. Общая геометрия задачи

Будем считать, что поверхность Земли является плоской и гладкой, а электрическая проводимость атмосферы  $\sigma$  зависит только от высоты  $z$ . В стационарном случае распределение электростатического потенциала  $\Phi$  от облачных зарядов в области, примыкающей к его нижней границе, вплоть до поверхности Земли, можно найти из уравнения непрерывности электрического тока, которое в нашем случае можно представить в виде:

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla \Phi) = 0. \quad (1)$$

С учётом азимутальной симметрии задачи получаем следующее уравнение для потенциала  $\Phi$ :

$$\partial^2 \Phi / \partial r^2 + (1/r) \partial \Phi / \partial r + (1/\sigma) \partial(\sigma \partial \Phi / \partial z) / \partial z = 0. \quad (2)$$

Будем полагать, что проводимость атмосферы ниже облака зависит от высоты  $z$  экспоненциально и имеет вид  $\sigma = b \cdot \exp(z/h)$ , где  $b = 1 \cdot 10^{-13}$  См/м, а  $h = 6,5$  км [8]. В этом случае решение уравнения (2) имеет вид:

$$\Phi = \int_0^{\infty} J_0(kr) [A_1(k) \exp(c_1 z) + B_1(k) \exp(c_2 z)] dk, \quad (3)$$

где  $J_0$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  $A_1$  и  $B_1$  – коэффициенты,

$$c_1 = -1/(2h) - [1/(4h^2) + k^2]^{1/2}, \quad c_2 = -1/(2h) + [1/(4h^2) + k^2]^{1/2}.$$

Коэффициенты  $A_1$  и  $B_1$  определяются граничными условиями задачи, которые имеют вид:

1.  $\Phi = (Q/4\pi\epsilon_0)[(r^2 + (h_p - z_b)^2)^{-1/2} - (r^2 + (h_n - z_b)^2)^{-1/2}]$  при  $z = z_b$ .

2.  $\Phi = 0$  при  $z = 0$ .

Здесь  $Q$  – абсолютная величина зарядов облака;  $h_p$  и  $h_n$  – высоты центров положительного и отрицательного зарядов соответственно;  $z_b$  – высота плоскости, расположенной непосредственно под облаком, на которой задаётся потенциал;  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Потенциал поверхности Земли принят равным нулю. В этом случае из формулы (3) сразу же следует выражение в квадратурах для вертикальной компоненты электростатического поля на поверхности Земли:

$$E_z(r, z = 0) = -\partial \Phi(r, z = 0) / \partial z = -\int_0^{\infty} J_0(kr) [A_1(k)c_1 + B_1(k)c_2] dk. \quad (4)$$

Поверхностная плотность зарядов на поверхности Земли определяется формулой [9]:

$$S = -\epsilon_0(\partial \Phi / \partial z)_z = 0. \quad (5)$$

В то же время, при пренебрежении проводимостью атмосферы, в соответствии с методом изображений, получается следующее очень простое алгебраическое выражение для вертикальной компоненты электрического поля на поверхности Земли [9]:

$$E_z^i = -Q/(2\pi\epsilon_0)[h_p/(h_p^2 + r^2)^{3/2} - h_n/(h_n^2 + r^2)^{3/2}]. \quad (6)$$

Соответственно, поверхностная плотность зарядов будет равна  $S^i = \epsilon_0 E_z^i$ .

### Результаты и обсуждение

Ниже представлены результаты конкретных расчётов, в которых были приняты следующие значения исходных параметров:  $h_n = 3$  км,  $h_p = 8$  км и  $z_b = 2$  км.

На рис. 2 показаны зависимости нормированной на  $Q$  компоненты напряжённости вертикального поля  $E_z$  на поверхности Земли от горизонтального расстояния  $r$ , которые были рассчитаны с учётом проводимости атмосферы (формула (4),  $E_z$ ) и в случае пренебрежения ею (формула (6),  $E_z^i$ ).

Из рисунка видно, что при учёте проводимости атмосферы величина вертикального электростатического поля грозового облака на поверхности Земли под облаком в окрестности оси облака немного превосходит величину поля, которую даёт метод изображений, но в целом оба метода дают близкие значения поля.

Аналогично, как следует из рис. 3, где представлены графики зависимости поверхностной плотности зарядов от  $r$  для  $Q = 30$  Кл, в обоих случаях распределения плотности зарядов слабо отличаются друг от друга.

На рис. 4 представлена (в %) относительная разность  $(E_z - E_z^i)/E_z$  в области существенных значений вертикальной компоненты поля  $E_z$  на поверхности Земли в окрестности оси облака в зависимости от расстояния  $r$ .

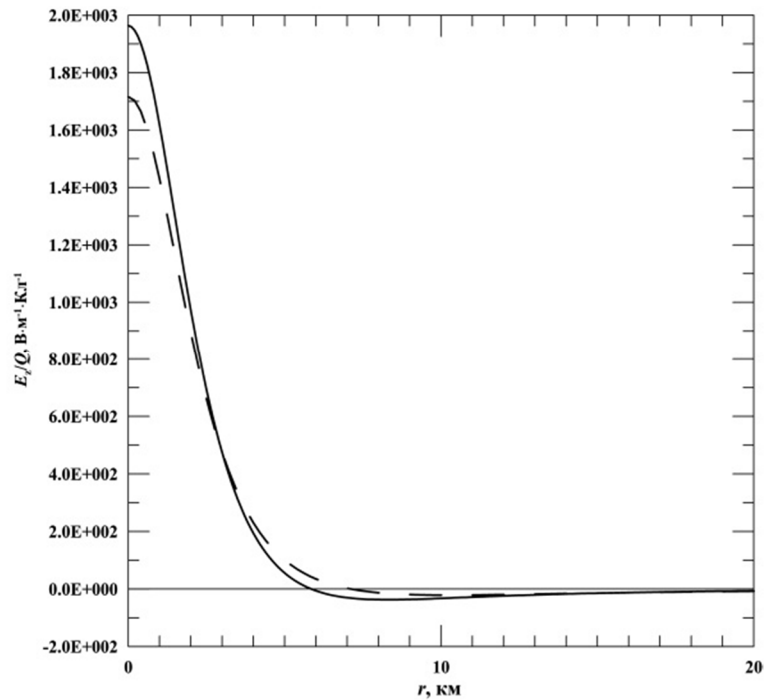


Рис. 2. Зависимости нормированной на  $Q$  напряжённости вертикального поля  $E_z$  на поверхности Земли от горизонтального расстояния  $r$ , которые были рассчитаны с учётом проводимости атмосферы (непрерывная линия) и в случае пренебрежения ею при использовании метода изображений (штриховая линия)

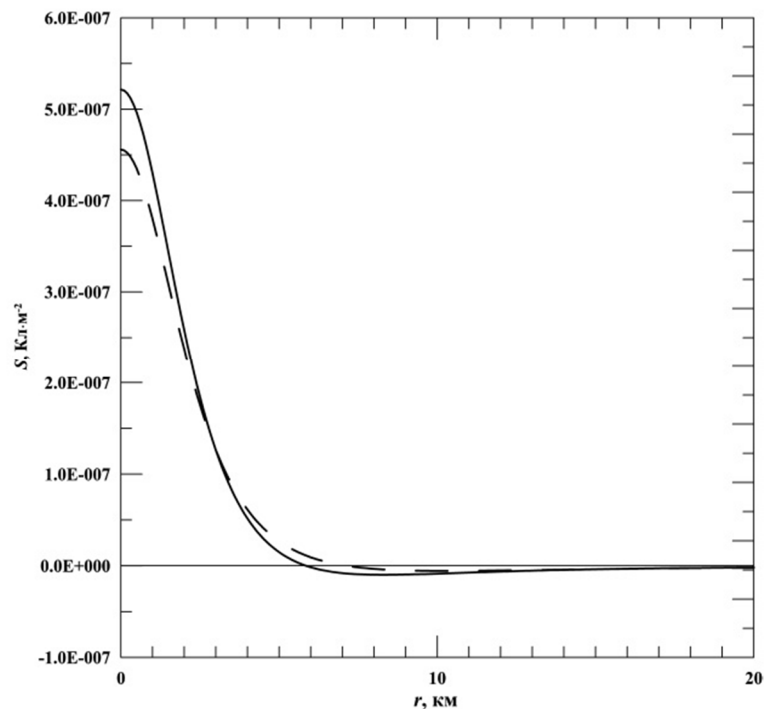


Рис. 3. Зависимости поверхностной плотности зарядов от горизонтального расстояния  $r$ , вычисленные с учётом проводимости атмосферы (непрерывная линия) и без её учёта посредством метода изображений (штриховая линия)

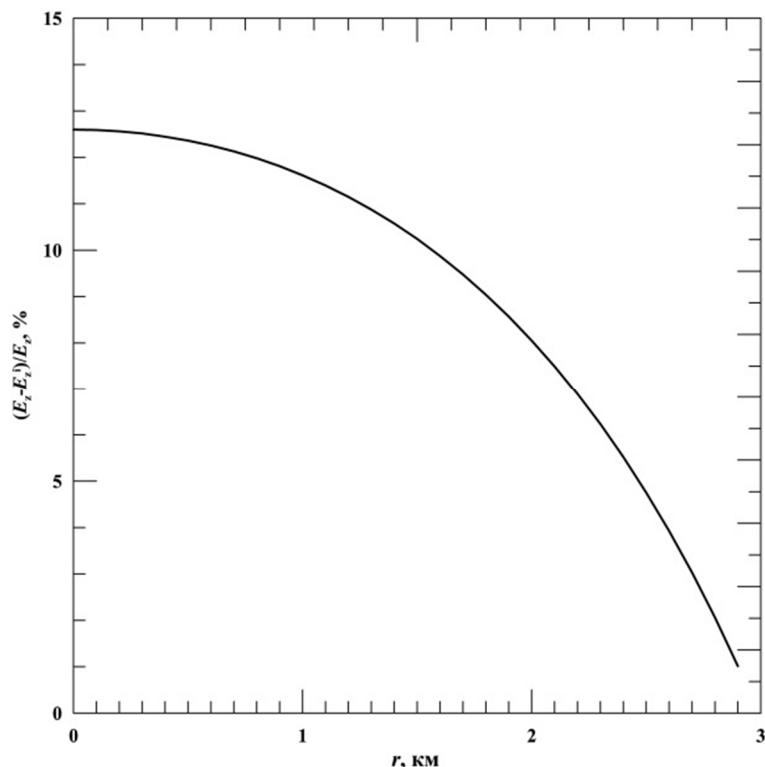


Рис. 4. Относительная разность  $(E_z - E_z^i)/E_z$  в области существенных значений вертикальной компоненты поля  $E_z$  на поверхности Земли в окрестности оси облака в зависимости от  $r$

Видно, что в окрестности оси облака, вертикальная компонента поля  $E_z^i$ , полученная методом изображений, оказывается меньше, при этом максимальное различие, которое достигает почти 13%, будет наблюдаться непосредственно под облаком (т. е. при  $r = 0$ ).

Таким образом, учитывая незначительное количественное расхождение в полученных результатах, использование метода изображений при оценке вертикального электрического поля грозового облака на поверхности Земли является вполне оправданным, тем более что расчёты по квадратурной формуле (4) гораздо более трудоёмки, сравнению с простой аналитической формулой (6).

### Выводы

Сравнение результатов модельных расчётов вертикального электростатического поля, возникающего на поверхности Земли в результате стационарного электрического взаимодействия грозового облака с поверхностью Земли (когда молниевые разряды «облако – земля» или «облако – облако» отсутствуют), которые выполнены методом изображений в пренебрежении электрической проводимостью атмосферы и с её учётом на основе решения уравнения непрерывности электрического

тока, показывает практическую эквивалентность обоих подходов и тем самым подтверждает обоснованность применимости метода изображений.

Тем не менее, следует помнить, что в области существенных значений вертикальной компоненты поля  $E_z$  на поверхности Земли (с радиусом  $r$  порядка нескольких километров), вертикальная компонента поля  $E_z^i$ , полученная методом изображений оказывается меньше, и максимальное различие (которое составляет почти 13%) достигается непосредственно под облаком и соответствует положению вертикальной проекции на поверхность Земли положительного и отрицательного зарядов, которыми моделируется грозовое облако (т. е. при  $r = 0$ ).

*Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований ОФН РАН IV.10. «Фундаментальные проблемы электродинамики и волновой диагностики атмосферы».*

### Литература

1. Боярчук К. А., Карелин А. В., Широков Р. В. Нейтральный кластер и его влияние на электромагнитные эффекты в атмосфере // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2005. – Т. 41. – № 4. – С. 537 – 549.

2. Боярчук К. А., Карелин А. В., Широков Р. В. Базовая модель кинетики ионизированной атмосферы / К. А. Боярчук и др. – М. : ФГУП «НПП ВНИИЭМ», 2006.
3. Карелин А. В. Механизм генерации электричества в грозовых облаках и тропических ураганах // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ. – 2010. – Т. 118. – № 5. – С. 45 – 49.
4. Тверской П. Н. Атмосферное электричество / П. Н. Тверской. – Л. : Гидрометеиздат, 1949. – 252 с.
5. Mühleisen R. The global circuit and its parameters // Electrical Processes in Atmospheres. – 1977 / Ed. by H. Dolezalek and R. Reiter. – Chapter 73. – P. 467 – 476. – Steinkopff, Darmstadt, West Germany: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: doi:10.1007/978-3-642-85294-7\_73.
6. Френкель Я. И. Теория явлений атмосферного электричества / Я. И. Френкель. – М. : Ком. Книга, 2007.
7. Чалмерс Дж. А. Атмосферное электричество / Дж. А. Чалмерс. – Л. : Гидрометеиздат, 1974.
8. Cole Jr. R. K., Pierce E. T. Electrification in the Earth's atmosphere for altitudes between 0 and 100 kilometers // J. Geophys. Res. – 1965. – V. 70. – No. 12. – P. 2735 – 2749: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.1029/JZ070i012p02735>.
9. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма / Дж. А. Стрэттон. – М. – Л. : ГИТТЛ, 1948.

Поступила в редакцию 10.02.2017

**Валерий Варламович Хегай,**  
кандидат физико-математических наук,  
заведующий отделом,  
т. (495) 851-97-80,  
e-mail: [hegai@izmiran.ru](mailto:hegai@izmiran.ru).  
(ИЗМИРАН).

**Виталий Павлович Ким,**  
кандидат физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник,  
т. (495) 851-97-80,  
e-mail: [kimvp9@gmail.com](mailto:kimvp9@gmail.com).  
(ИЗМИРАН).

**Александр Витальевич Карелин,**  
доктор физико-математических наук,  
начальник отдела  
т. (495) 513-54-01,  
e-mail: [avkarelin@mail.ru](mailto:avkarelin@mail.ru).  
(ФГУП ЦНИИмаш).

## ABOUT APPLICABILITY OF THE METHOD OF IMAGES FOR ANALYSIS OF INTERACTION OF THUNDER STORM CLOUDS WITH THE EARTH'S SURFACE

V. V. Hegai, V. P. Kim, A. V. Karelin

*The article provides calculations of vertical component  $E_z$  of electrostatic field produced as a result of stationary electric interaction between a thunder storm cloud and the Earth's surface in case of no 'cloud-to-ground' or 'cloud-to-cloud' lightning discharges. Calculations of vertical electrostatic field, produced on the Earth's surface as a result of stationary electric interaction of a thunder storm cloud with ground surface, performed using the method of images (considering and without considering electric conductivity of the atmosphere) with application of electric current continuity equation, have demonstrated that both approaches provide approximately equal results. Though in the Earth's area (with the radius  $r$  of about several kilometers) of essential values of the field vertical component  $E_z$ , the field vertical component  $E_z$  calculated using method of images appears to be smaller. The difference achieves its maximum of almost 13% directly under the cloud and corresponds to position of vertical projection of positive and negative charges modeling the thunder storm cloud on the Earth's surface (i.e. at  $r = 0$ ).*

**Key words:** thunder storm cloud, electrostatic field, method of images, conductivity of the atmosphere, electric current continuity equation.

### List of References

1. Boiarchuk K. A., Karelin A. V., Shirokov R. V. Neutral cluster and its effect on electromagnetic phenomena in the atmosphere // RAN News-Bulletin. Physics of atmosphere and ocean. – 2005. – Vol. 41. – No. 4. – Pp. 537 – 549.
2. Boiarchuk K. A., Karelin A. V., Shirokov R. V. Basic model for kinetics of ionized atmosphere / K. A. Boiarchuk et al. – Moscow: FSUE «NPP VNIIEМ», 2006.
3. Karelin A. V. Mechanism of electricity generation in thunder storm clouds and tropical storms // Electromechanical matters. VNIIEМ studies. – 2010. – Vol. 118. – No. 5. – Pp. 45 – 49.

4. Tverskoi P. N. Atmospheric electricity / P. N. Tverskoi. – Leningrad: Gidrometeoizdat [Гидрометеоиздат], 1949. – 252 pp.
5. Mühleisen R. The global circuit and its parameters // Electrical Processes in Atmospheres. – 1977 / Ed. by H. Dolezalek and R. Reiter. – Chapter 73. – P. 467 – 476. – Steinkopff, Darmstadt, West Germany: [Electronic source]. – Available at: doi:10.1007/978-3-642-85294-7\_73.
6. Frenkel Ia. I. Theory of atmospheric electricity phenomena / Ia. I. Frenkel. – Moscow: Ком. Книга [Ком. Книга], 2007.
7. Chalmers J. A. Atmospheric electricity / J. A. Chalmers. – Leningrad: Gidrometeoizdat [Гидрометеоиздат], 1974.
8. Cole Jr. R. K., Pierce E. T. Electrification in the Earth's atmosphere for altitudes between 0 and 100 kilometers // J. Geophys. Res. – 1965. – V. 70. – No. 12. – P. 2735 – 2749: [Electronic source]. – Available at: <http://dx.doi.org/10.1029/JZ070i012p02735>.
9. Stretton J. A. Electromagnetic theory / J. A. Stretton. – Moscow – Leningrad: GITTL (State Publishing House for Theoretical Technical Literature) [ГИТТЛ], 1948.

**Valerii Varlamovich Hegai,**

*Candidate of Physics and Mathematics (Ph. D. (Phys.-Math.)),*

*Head of Department,*

*e-mail: [hegai@izmiran.ru](mailto:hegai@izmiran.ru), tel.: (495) 851-97-80.*

*(IZMIRAN – Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Waves Propagation of the Russian Academy of Sciences).*

**Vitalii Pavlovich Kim,**

*Candidate of Physics and Mathematics (Ph. D. (Phys.-Math.)),*

*Leading Researcher,*

*e-mail: [kimvp9@gmail.com](mailto:kimvp9@gmail.com),*

*tel.: (495) 851-97-80.*

*(IZMIRAN).*

**Alexandr Vitalevich Karelin,**

*Doctor of Physics and Mathematics (D.Sc. (Phys.-Math.)),*

*Head of Department,*

*e-mail: [avkarelin@mail.ru](mailto:avkarelin@mail.ru),*

*tel.: (495) 513-54-01.*

*(FGUP TSNIIMASH – Federal State Unitary Enterprise «Central Scientific Research Institute of Machine-Building Industry»).*