

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КОНСТРУКЦИИ ПРИ СУПЕРЭЛЕМЕНТНОМ АНАЛИЗЕ

И. А. Мещихин

Рассматриваются вопросы формирования матриц восстановления для оценки максимальных эквивалентных напряжений методом суперэлементов при решении задачи линейной динамики методом суперпозиции собственных форм. Матрицы восстановления позволяют по значениям перемещений в узлах суперэлемента восстановить любую «внутреннюю» величину – перемещения, ускорения, силы, напряжения в узле либо элементе исходной до редукции модели. Проблема формирования эффективных матриц восстановления заключается в определении минимального по числу элементов подмножества, содержащего максимум эквивалентных напряжений. Предлагается ассоциировать элементы искомого подмножества с элементами выпуклой оболочки, построенной в координатах собственных форм. Предлагаемый подход рассмотрен на тестовой конструкции, результат расчёта верифицирован сравнением с полной моделью.

Ключевые слова: метод суперэлементов, принцип суперпозиции, совместный анализ нагружений, метод конечных элементов.

Введение

Анализ нагружений при совместной эксплуатации с ракетой-носителем является неотъемлемой частью расчётного обоснования несущей способности космического аппарата (КА). Для возможности расчёта конструкции необходимо разработать модель специального вида – суперэлементную [1].

Динамическая суперэлементная модель разрабатывается на основе конечно-элементной модели путём редукции внутренних степеней свободы модели к внешним, интерфейсным методом Крейга-Бемптона [2]. Редуцированная модель содержит степени свободы интерфейса узлов стыка подконструкции и обобщённые координаты, число которых определяется критериями полноты динамической модели, в частности требованиями к суммарной модальной массе не менее 95% от полной [3].

Помимо возможности определить нагружение на узлах интерфейса конструкции при совместной эксплуатации суперэлементная модель позволяет определить перемещения, ускорения, силы и напряжения во внутренних степенях свободы конструкции без привлечения исходной конечно-элементной модели. Для этих целей на этапе редукции создаётся специальная матрица восстановления [4], которая позволяет определить значение запрашиваемой величины в любом внутреннем узле либо элементе по значениям перемещений в узлах интерфейса. Данная возможность успешно применяется для определения силовых факторов в местах крепления нагруженных кронштейнов, ускорений в центрах масс полезной нагрузки.

Применение матриц трансформации для определения несущей способности конструкции затруднительно: объём восстанавливаемых величин данным методом ограничен, а без знания локализации максимальных эквивалентных напряжений запрос напряжённого состояния в конкретном месте часто неинформативен.

С другой стороны, расчёт максимальных напряжений

непосредственно по временным зависимостям ускорений на интерфейсе конструкции для всех расчётных случаев также затруднён рядом факторов. Учитывая размерность полной конечно-элементной модели, число расчётных случаев и объём временных точек каждого из них, время на полный обшёт может составлять месяцы. Оценка несущей способности КА на данный момент производится по приведенным к эквивалентным квазистатическим режимам и, выборочно, для некоторых режимов в виде решения динамической задачи.

Данный подход, несмотря на устоявшуюся практику применения, может содержать риски по некорректной оценке несущей способности аппарата. Инструментом снижения риска некорректной оценки несущей способности конструкции является попытка оценить максимальные эквивалентные напряжения в конструкции непосредственно на этапе суперэлементного расчёта конструкции. Рассогласованность оценок несущей способности, полученных в рамках расчёта конструкции на действие квазистатических перегрузок, с предлагаемым подходом для некоторого расчётного случая является поводом для решения полномасштабной динамической задачи.

Выбор характерных элементов

Одним из подходов к выделению множества характерных [5] в указанном смысле элементов посвящена данная статья. Рассмотрим пример антенны на откидывающейся штанге, как более наглядном для демонстрации предлагаемого подхода. В качестве интерфейсных узлов суперэлемента выберем узлы крепления конструкции.

Общий вид конструкции и первых двух тонов колебаний, соответствующих максимальным модальным массам в поперечных направлениях, представлены на рис. 1, 2.

Требования по полноте модели ограничивают

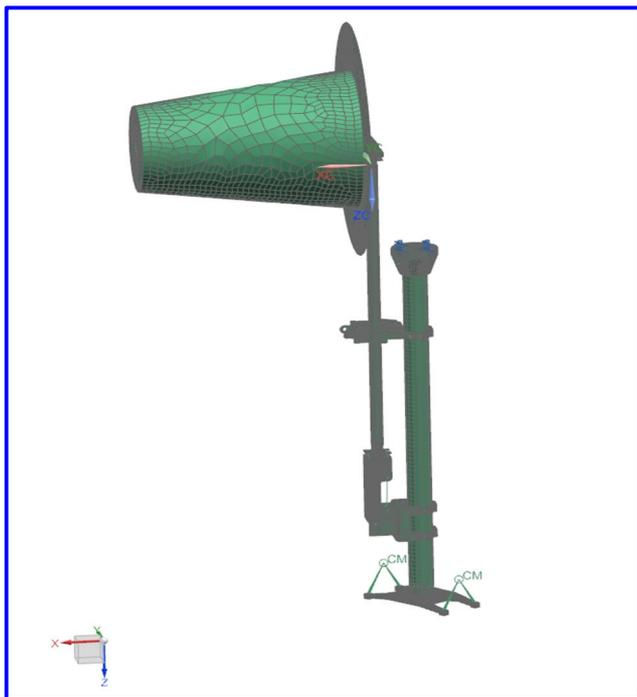


Рис. 1. Общий вид конструкции

размерность модели нагружения – отклик на динамическое нагружение ищется в виде суперпозиции набора собственных форм. Каждой собственной форме соответствует своё распределение модальных напряжений. Так как максимум напряжений ищется в виде суперпозиции модальных форм, максимум

компонентов тензора напряжений принадлежит выпуклой оболочке соответствующих компонент модальных напряжений.

При одноосном нагружении для анализа напряжённого состояния конструкции удобно представить напряжения в элементах при действии набора из двух нагружений в виде, представленном на рис. 3.

Из рис. 3 видно, что при одноосном нагружении максимум напряжений будет реализован в одном из четырёх элементов конструкции, которые являются элементами выпуклой огибающей.

При условии, что любое динамическое нагружение можно представить в виде суперпозиции из двух собственных форм, максимум напряжений реализуется в одном из элементов, принадлежащих выпуклой огибающей в первой четверти координат, показанной на рис. 1.

В общем случае представления динамического отклика в виде n форм максимальные напряжения реализуются в одном из элементов $n-1$ мерной выпуклой огибающей.

Для рассматриваемого примера 95% модальной массы по всем трем поступательным направлениям содержит 10 собственных форм колебаний с номерами 1, 2, 4 – 6 – поперечные формы и 11, 15, 18, 19, 22 – продольные формы колебаний. Следовательно, для определения множества элементов, в которых возможен максимум напряжения необходимо построить выпуклую оболочку в первом квадранте 10 мерного пространства комбинаций модальных форм.

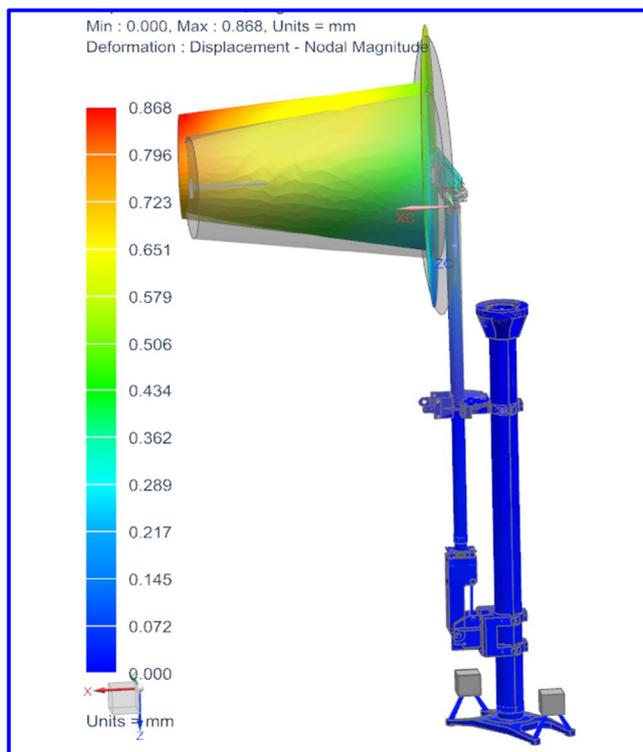
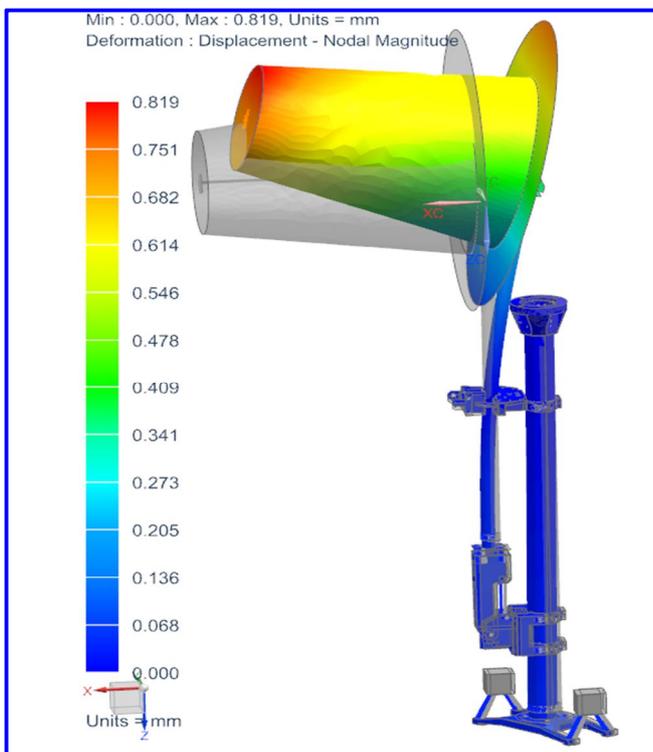


Рис. 2. Главные формы колебаний

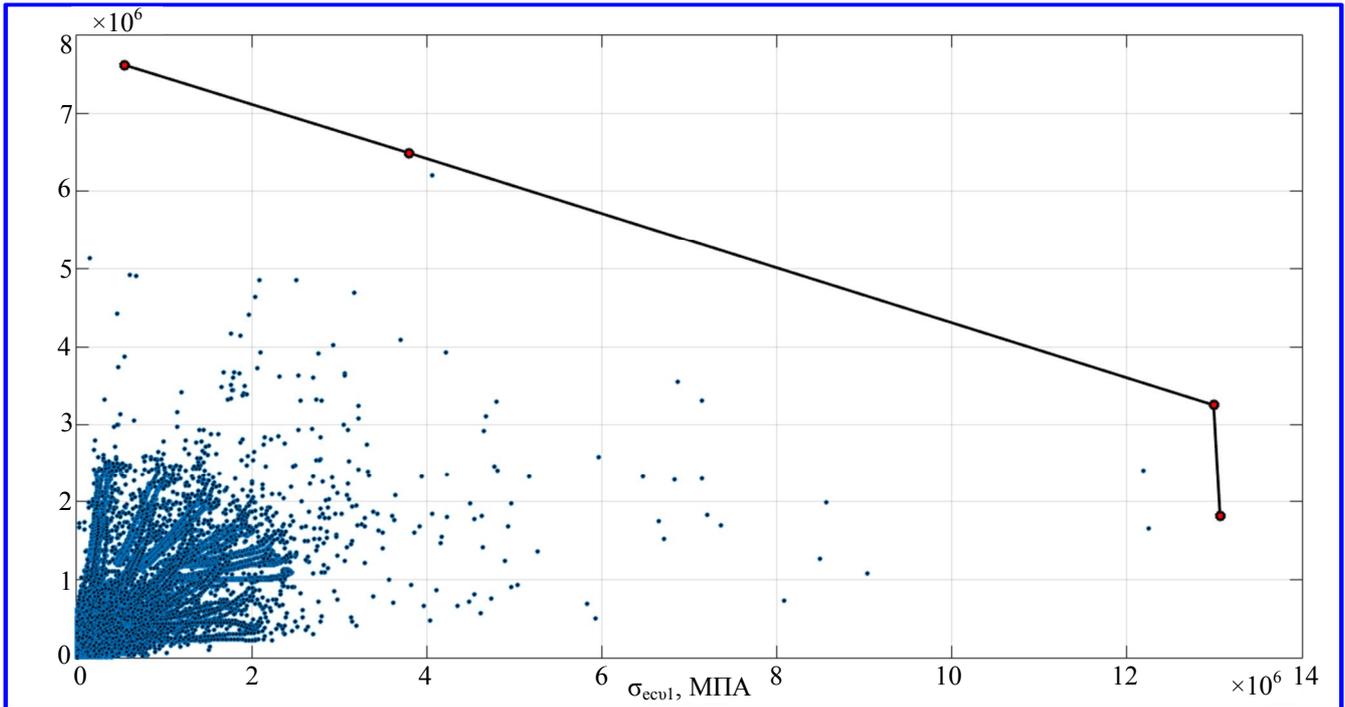


Рис. 3. Элементы конструкции в координатах модальных напряжений σ_{ecv1} – модальные напряжения формы 1, σ_{ecv2} – модальные напряжения формы 2

Методика редукции размерности огибающей

Колебания конструкции описывается набором из главных и парциальных форм колебаний. Эквивалентные напряжения парциальных форм, как правило, локализованы в конструктивном элементе, ассоциированном с парциальной формой, а число главных форм со значимой модальной массой часто ограничено. Производя раздельную оценку характерных для оценки несущей способности конструкции элементов для парциальных и главных форм, можно существенно сократить размерности огибающей.

Критерием разделения форм, исследование сочетаний которых существенно для оценки напряженного состояния конструкции может является корреляция модальных напряжений для различных собственных форм.

Матрица корреляции удобно рассчитать по формуле $K = SS^T$, где S – матрица модальных напряжений, T – оператор транспонирования матрицы. К коэффициентам матрицы коэффициентов

корреляции $C_{i,j} = \frac{K_{i,j}}{\sqrt{K_{i,i}K_{j,j}}}$ можно применить

пороговую функцию вида $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } K_{i,j} < \alpha \\ 0 & \text{if } K_{i,j} > \alpha \end{cases}$, где α –

допуск на коэффициент корреляции.

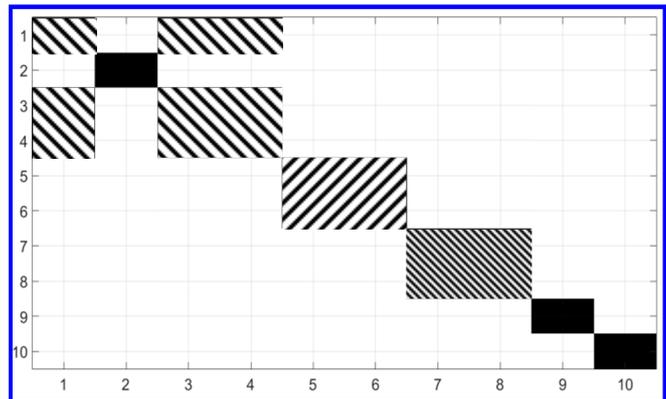


Рис. 4. Разделение форм

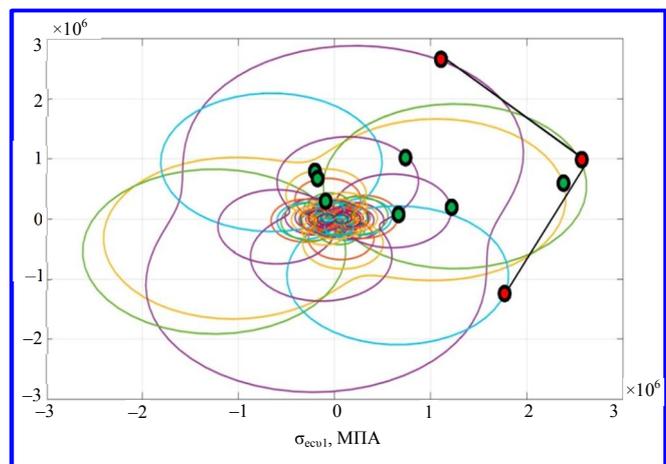


Рис. 5. Оценка множества элементов, в которых возможна реализация максимальных напряжений

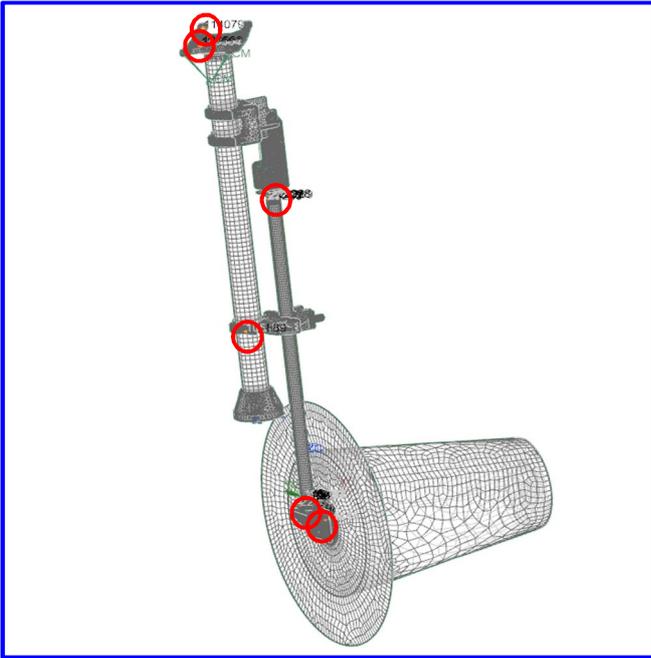


Рис. 6. Характерные элементы конструкции

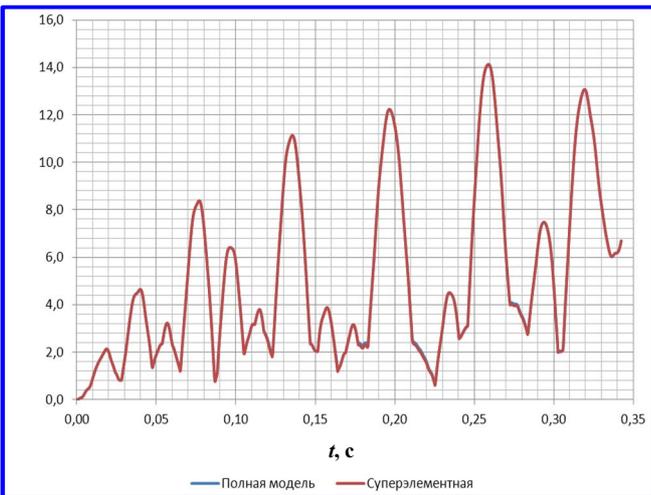


Рис. 7. Сравнение результатов расчёта максимальных эквивалентных напряжений на полной и суперэлементной моделях

Представим результат расчёта δ_{ij} графически на рис. 4.

Из рис. 4 видно, что для данной конструкции актуально исследовать сочетания форм 1, 3, 4 (главные) и попарно парциальных форм 5 – 8. Максимумы форм 2, 9 и 10 должны быть включены в список без исследования сочетаний с остальными.

В общем спектре частотам 1 – 10 соответствуют формы с номерами 1, 2, 4 – 6, 11, 15, 18, 19, 22.

Общий случай нагружения

При неоднородном нагружении оценка несущей способности производится по эквивалентным напряжениям, зависящим от компонентов тензора напряжений нелинейно. Эквивалентные напряжения

по Мизесу являются квадратичной формой от компонентов тензора напряжений вида:

$$\sigma_{\text{эв}}^2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}{2}$$

При действии комбинации из двух нагружений с коэффициентами α_1 и α_2 компоненты тензора напряжений удобно выразить в виде:

$$\sigma_{ij} = \alpha_1 \sigma_{ij}^1 + \alpha_2 \sigma_{ij}^2,$$

где $\sigma_{ij}^1, \sigma_{ij}^2$ – компоненты тензора напряжений формы 1 и 2 соответственно.

Тогда эквивалентные напряжения удобно выразить в виде

$$\sigma_{\text{эв}}^2 = \alpha_1^2 \alpha_1 + \alpha_2^2 \alpha_2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \text{ или } \sigma_{\text{эв}}^2 = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} A \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

где

Характеристики квадратичной формы исчерпываются описанием её собственных чисел и форм матрицы A . Максимальное по модулю собственное число характеризует большую полуось, соответствующая форма – сочетание нагружений при котором эквивалентные напряжения максимальны.

Для каждого элемента можно определить такое сочетание форм колебаний, при котором эквивалентные напряжения в нём будут максимальны. Пример множества напряжённых состояний, которые образуются при различных сочетаниях форм 1 и 2, представлены на рис. 5.

Каждому элементу на рис. 4 соответствует кривая, длина которой от каждой точки до начала координат соответствует эквивалентным напряжениям, которые реализуются в нём при действии сочетания нагружений, пропорционального отношению координат этой точки.

Максимум напряжений соответствует точке на данной кривой. Выпуклая оболочка данных точек позволяет выделить подмножество из множества всех элементов, которое содержит элемент с максимальными эквивалентными напряжениями.

На рис. 5 видно, что максимум напряжений демонстрационного примера реализуется в трёх элементах.

В общем случае сочетания n форм наиболее нагруженное сочетание для каждого элемента определяется координатами главной полуоси квадратичной формы A выражения вида

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} A \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix}^T.$$

Результаты расчёта на тестовой модели

На рис. 6 показано множество элементов, в которых достигается максимум эквивалентных напряжений.

Для верификации предлагаемого подхода приложим динамическую нагрузку с характерным спектром нагружения для данной конструкции к интерфейсу конструкции и определим значение максимальных напряжений по полной конечно-элементной модели и с помощью матриц восстановления, построенных на основе выделенного подмножества элементов. Характерное нагружение для целей верификации оценки напряжённого состояния суперэлементной моделью возбуждает в конструкции все возможные сочетания собственных форм конструкции. Подобным свойством, в частности, будет обладать достаточно долгая временная зависимость с иррациональным отношением частот, численные значения которых близки к собственным частотам конструкции [6].

Результаты сравнения показаны на рис. 7.

Более наглядно сравнение данных представить в виде гистограммы на рис. 8.

Из рис. 8 видно, что оценка максимальных напряжений, построенная по суперэлементной модели, близка к оценке максимальных напряжений, полученной по полной конечно-элементной модели при существенно меньшем объёме затраченного на расчёт времени. Стоит отметить, что вариация оценки максимальных напряжений присутствует в модели при малых максимальных напряжениях, которые реализуются при сочетаниях множества собственных форм. Максимум максимальных напряжений совпадает для полной и суперэлементной моделей. Таким образом напряженно-деформированное состояние всей конструкции может быть представлено напряжённым состоянием 24 элементов с приемлемой для предварительного анализа состоянием точностью.

Выводы

В статье предложен вариант оценки несущей способности конструкций при суперэлементом расчёте для задачи линейной динамики. Максимум эквивалентных напряжений оценивается как максимум из набора элементов конструкции. При учёте всех элементов оценка эквивалентных напряжений на полной модели совпадает с редуцированной, но размер матриц восстановления нивелирует все вычислительные преимущества метода суперэлементов. Произвольный малый набор элементов мало информативен для оценки максимальных напряжений.

Поступила в редакцию 24.10.2017

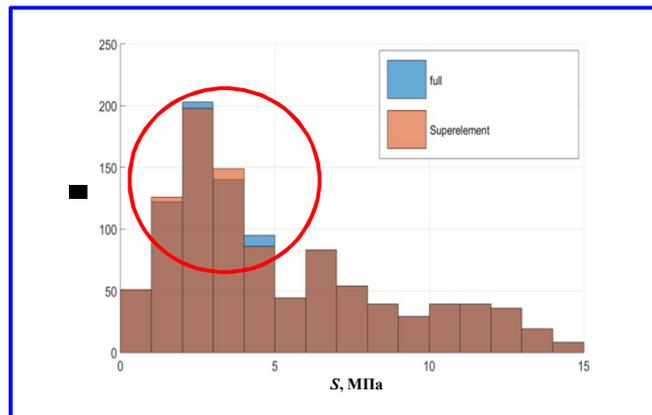


Рис. 8. Гистограммы для сравнения результатов на полной и суперэлементной моделях

Методика рационального выбора характерных элементов конструкции с позиции презентативности напряжённого состояния позволяет оценить сложность напряжённого состояния при действии динамического нагружения. В случае, если число характерных элементов невелико, возможно произвести оценку напряженного состояния конструкции непосредственно на этапе совместного анализа нагрузок, что позволяет существенно сократить расчётное время оценки несущей способности конструкции при сохранении точности расчёта.

Литература

1. Канунникова Е. А., Мешихин И. А. Применение суперэлементов в прочностных расчётах элементов космических аппаратов // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. – 2011. – Т. 121. – №. 2. – С. 31 – 34.
2. Геча В. Я. и др. Создание редуцированных матриц жёсткости и масс для совместного анализа нагрузок // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. – 2011. – Т. 121. – №. 2. – С. 27 – 30.
3. Геча В. Я. и др. Вопросы создания и верификации динамической модели космического аппарата «Метеор-М» № 2 на этапе выведения // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. – 2014. – Т. 142. – №. 5. – С. 35 – 42.
4. Мешихин И. А., Сахненко М. А., Сосёнушкин Е. Н. Применение метода внешних суперэлементов и ОТМ-матриц при мониторинге состояний шлюзовых затворов // Речной транспорт (XXI век). – 2013. – №. 5. – С. 52 – 55.
5. Мешихин И. А., Гаврюшин С. С. Критерии качества и алгоритм выбора редуцированных моделей для мониторинга технических конструкций // Математическое моделирование и численные методы. – 2016. – №. 4 (12).
6. Салтыков П. С. Специальная эргодическая теорема для диффеоморфизмов Аносова на двумерном торе // Функциональный анализ и его приложения. – 2011. – Т. 45. – №. 1. – С. 69 – 78.

Илья Александрович Мешихин, младший научный сотрудник,
т. (495)366-33-61, e-mail: lab186@mcc.vniiem.ru.
(АО «Корпорация «ВНИИЭМ»).

METHODS OF STRUCTURAL LOAD-CARRYING ABILITY EVALUATION IN THE COURSE OF SUPERELEMENT ANALYSIS

I. A. Meshchikhin

The article considers the construction of regeneration matrices for estimation of the maximum equivalent stresses using the superelement method in the course of solving the tasks of linear dynamics using the method of superposition of eigenmodes. The regeneration matrices allow the reconstruction of any 'internal' value (motion, acceleration, power, stress) of a node or an element of the initial model (before reduction), using the values of displacement in the nodes of a superelement. The principal point of construction of effective regeneration matrices is to define a subset with minimum number of elements, containing maximum of equivalent stresses. The article suggests associating the elements of the required subset with the elements of a convex hull constructed in the coordinates of eigenmodes. The suggested approach was analyzed on a test structure, and the calculation result was verified by comparison with the full model.

Key words: superelement method, superposition principle, joint stress analysis, finite element method.

List of References

1. Kanunnikova E.A., Meshchikhin I.A. Application of superelements for spacecraft structural elements strength calculations // Matters of Electromechanics. VNIEM Proceedings. – 2011. – Vol. 121. – No. 2. – pp. 31 – 34.
2. Gecha V.Ia. et al. Construction of reduced stiffness and mass matrices for joint stress analysis // Matters of Electromechanics. VNIEM Proceedings. – 2011. – Vol. 121. – No. 2. – pp. 27 – 30.
3. Gecha V.Ia. et al. Construction and verification of Meteor-M No.2 spacecraft dynamic model at the stage of injection // Matters of Electromechanics. VNIEM Proceedings. – 2014. – Vol. 142. – No. 5. – pp. 35 – 42.
4. Meshchikhin I.A., Sakhnenko M.A., Sosenushkin E.N. Application of external superelements method and output transformation matrices for floodgate status monitoring // River transport (XXI century). – 2013. – No. 5. – pp. 52 – 55.
5. Meshchikhin I.A., Gavriushin S.S. Criteria of quality and algorithm of selection of reduced models for monitoring of engineering structures // Mathematical modeling and numerical methods. – 2016. – No. 4 (12).
6. Saltykov P.S. Special ergodic theorem for Anosov diffeomorphisms on two-dimensional tori // Functional analysis and its Applications. – 2011. – Vol. 45. – No. 1. – pp. 69 – 78.

Ilya Aleksandrovich Meshchikhin, Junior Researcher, tel.: +7 (495)366-33-61, e-mail: lab186@mcc.vniem.ru. (JC «VNIEM Corporation»).