УДК 519.233.24

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЛЕТНЫХ ИСПЫТАНИЙ И ЭКСПЛУАТАЦИИ

Д. М. Кривопалов, А. Е. Давыдов, Р. Н. Барбул

Предложен и математически обоснован алгоритм использования метода байесовских оценок при частичной априорной определенности по схеме биномиальных испытаний для оценки показателей надежности космических аппаратов по результатам летных испытаний и эксплуатации. Показана возможность его использования при незавершенных испытаниях, а также в условиях малой статистической выборки.

***Ключевые слова:** байесовские оценки, показатели надежности, космический аппарат, летные испытания.*

Введение

Современный комплекс мероприятий создания космических аппаратов (КА) в части надежности включает в себя как проведение теоретических расчетов надежности на этапах разработки конструкторской документации, так и проведение оценки этих показателей по результатам летных испытаний (ЛИ) и эксплуатации. На практике количество образцов КА, подвергаемых испытаниям, мало, что не позволяет накопить достаточный объем статистических данных для применения известных способов оценки показателей надежности [1 – 3]. В этой связи становится актуальной разработка математически непротиворечивого методического аппарата для решения задач оценки надежности в условиях незавершенных испытаний. В данной работе предлагается методика оценки показателей надежности КА на основе метода байесовского оценивания при частичной априорной информации для схемы биномиальных испытаний.

Метод байесовской оценки надежности космического аппарата

В соответствии с требованиями нормативных документов оценку надежности КА рекомендуется выполнять в виде нижних односторонних доверительных границ (НДГ) вероятности безотказной работы (ВБР) с заданным уровнем доверительной вероятности. В условиях малых выборок рекомендуется использовать методы байесовского оценивания. Поскольку результатом испытаний КА является «успех» или «отказ», а до начала проведения испытаний заранее известно теоретическое значение вероятности безотказной работы (проектная оценка), то целесообразно использовать метод байесовского оценивания при частичной априорной определенности по схеме биномиальных испытаний.

Исходными данными в этом случае являются: n – наблюдаемое количество испытаний; d – наблюдаемое количество отказов; P_0 – проектная оценка; γ – доверительная вероятность.

Суть метода заключается в объединении априорной информации: проектной оценки P_0, полученной на этапе разработки конструкторской документации, с результатами испытаний, фактической наработкой при ЛИ (эксплуатации).

Поскольку не известен закон распределения оценки ВБР, до проведения испытаний априорное распределение оценки ВБР принимается в виде бета-распределения, плотность которого в общем виде:

$$h(p)=\frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha;\ \beta)},\quad \alpha\ge 0;\ \beta\ge 0;\ 1\ge p\ge 0, \tag{1}$$

где В(α; β) – бета-функция:

$$B(\alpha;\ \beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{2}$$

где Г (α) – гамма-функция:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du. \tag{3}$$

Физический смысл параметров α и β заключается в эквивалентном числе успешных и неуспешных испытаний соответственно с учетом расширения их значений не только на целое, но и на вещественное множество чисел.

Для оценки ВБР с учетом результатов испытаний используется апостериорное бета-распределение, плотность которого имеет вид:

$$\ddot{h}(p)=\frac{p^{\alpha+n-d-1}(1-p)^{\beta+d-1}}{B(\alpha+n-d;\ \beta+2)},\quad \alpha\ge 0;\ \beta\ge 0;\ 1\ge p\ge 0. \tag{4}$$

В целом задача оценки ВБР по результатам испытаний сводится к поиску такого наихудшего априорного распределения, которое приводит к наиболее пессимистичным в смысле апостериорного риска оценкам показателя надежности. В этой связи для нахождения численных значений параметров бета-распределений используются ограничения:

1. Равенство априорного значения ВБР проектной оценке:

$$P_0 = \int_0^1 ph(p)dp. \quad (5)$$

2. Апостериорная дисперсия должна быть максимальна:

$$U(\alpha;\beta) = \max\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha+n-d+1}(1-x)^{\beta+d-1}}{B(\alpha+n-d;\ \beta+d)}dx - \\ \displaystyle -\left(\int_0^1 \frac{x^{\alpha+n-d+1}(1-x)^{\beta+d-1}}{B(\alpha+n-d;\ \beta+d)}dx\right)^2\end{array}\right]. \quad (6)$$

После математических преобразований эти ограничения сводятся к виду:

$$P_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad (7)$$

$$U(\alpha;\ \beta) = \max\left[\frac{(\alpha+n-d)(\beta+d)}{(\alpha+\beta+n)^2(\alpha+\beta+n+1)}\right]. \quad (8)$$

Подробное рассмотрение процесса нахождения α и β с соответствующим математическим обоснованием изложено в [1].

Для практических вычислений используется алгоритм [1]:

1. Проверяется условие, при котором функция апостериорной дисперсии монотонно убывает:

$$\left(\frac{1-P_0}{P_0} - g\right)\left(d - \frac{n}{2}\right) \geq 0,$$
$$g = \frac{d}{n-d}\,\frac{(d+1)(n-2d)+2(n-d)^2}{(n-d+1)(n-2d)-2d^2}. \quad (9)$$

2. Если условие выполняется, то значения параметров бета-распределения принимают значения ноль:

$$\alpha = 0, \beta = 0. \quad (10)$$

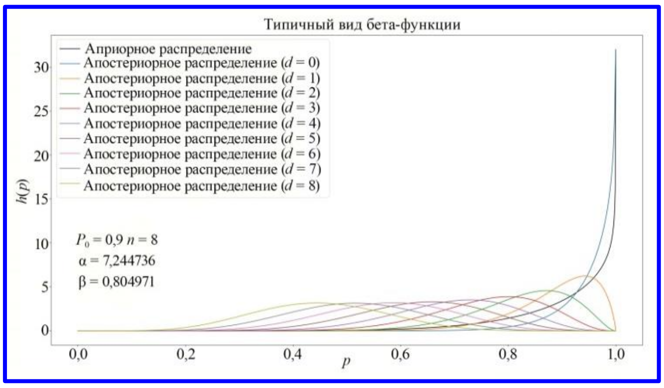

Рис. 1. Вид функций априорного и апостериорного бета-распределений вероятности безотказной работы космического аппарата

3. Если условие монотонности не выполняется, то:

3.1. Необходимо решить кубическое уравнение:

$$z^3 + Az^2 + Bz^2 + C = 0, \quad (11)$$

где

$$A = -\frac{2s(2P_0-1)}{P_0(1-P_0)};$$
$$B = -\frac{s(3s+2P_0-1)}{P_0(1-P_0)}; \quad (12)$$
$$C = -\frac{2s^2}{P_0(1-P_0)};$$
$$s = n(1-P_0)-d.$$

3.2. Выбрать единственный действительный корень уравнения из области:

$$z > n. \quad (13)$$

3.3. Вычислить значения параметров бета-распределения по формулам:

$$\alpha = (z-n)P_0;$$
$$\beta = (z-n)(1-P_0). \quad (14)$$

Типичный вид функций априорного и апостериорного бета-распределений ВБР показан на рис. 1.

Можно заметить, что в отсутствии отказов значения плотности вероятности апостериорной бета-функции плотнее группируются вблизи вертикальной прямой:

$$x = 1. \quad (15)$$

При наличии отказов графики все более равномерно распределяются вдоль горизонтальной прямой:

$$y = 0. \quad (16)$$

При известных параметрах α и β байесовская точечная оценка ВБР может быть вычислена по формуле:

$$\hat{P} = \frac{\alpha + n - d}{\alpha + \beta + n}. \qquad (17)$$

Оценка байесовской НДГ ВБР в общем виде производится с помощью численного решения уравнения:

$$\int_{P_\gamma^{\text{Байес}}}^{1} \ddot{h}(p)dp - \gamma = 0. \qquad (18)$$

Однако для практических работ более удобно использовать формулу:

$$P_\gamma^{\text{Байес}} = \left[1 + \frac{\beta + d}{\alpha + n - d} F\left(\gamma;\ 2(\beta + d);\ 2(\alpha + n - d)\right)\right]^{-1}, \qquad (19)$$

где F(γ; δ_1; δ_2) – квантиль распределения Фишера для степеней свободы δ_1 и δ_2 для уровня доверия γ.

На практике применение данного метода для КА «в чистом виде» не представляется возможным, поскольку испытания могут быть еще не завершены. Кроме того, испытания могут проводиться несинхронно. Поэтому требуется дополнить метод возможностью проведения оценки не только после завершения испытаний, но и в любой произвольный момент времени до их завершения.

Для реализации предлагаемого метода используется алгоритм (9) – (19) за исключением того, что потребуется не одно конкретное число, а вектор значений. При этом координатами вектора будут являться все теоретически возможные оценки ВБР для различного количества отказов рассматриваемого количества КА (*n*). Далее по тексту будем называть его вектором байесовских оценок.

$$\underline{\mathbf{P}}_\gamma^{\text{Байес}} = \left[\underline{\mathbf{P}}_{\gamma\ 0}^{\text{Байес}} \underline{\mathbf{P}}_{\gamma\ 1}^{\text{Байес}} \dots \underline{\mathbf{P}}_{\gamma\ n}^{\text{Байес}}\right], \qquad (20)$$

где $\underline{\mathbf{P}}_{\gamma\ 0}^{\text{Байес}}$ – значение НДГ ВБР для d = 0; $\underline{\mathbf{P}}_{\gamma\ 1}^{\text{Байес}}$ – значение НДГ ВБР для d = 1; $\underline{\mathbf{P}}_{\gamma\ n}^{\text{Байес}}$ – значение НДГ ВБР для $d = n$.

Значения P_0, n и γ остаются фиксированными при получении численных значений координат вектора.

Для решения прикладных задач ниже приводится листинг кода программы-прототипа на языке Python, результатом которого является сформированный вектор $\underline{\mathbf{P}}_\gamma^{\text{Байес}}$.

```
# Процедура проверки условия (9):
def Condition_Check(Po,n,d):
  if n == d:
    return False
  g = d/(n-d)*((d+1)*(n-2*d)+2*(n-d)**2)/((n-d+1)*(n-2*d)-2*d**2)
  return ((1-Po)/Po-g)*(d-n/2) < 0
# Процедура решения уравнения (11) методом Кардано:
def Equation_Solve(Po,n,d):
  s = n*(1-Po)-d
  A = -2*s*(2*Po-1)/Po/(1-Po)
  B = -s*(3*s+2*Po-1)/Po/(1-Po)
  C = -2*s**2/Po/(1-Po)
  p = -A**2/3+B
  q = 2*A**3/27-A*B/3+C
  y = (-q/2+(q**2/4+p**3/27)**(1/2))**(1/3)+(-q/2-(q**2/4+p**3/27)**(1/2))**(1/3)
  z = (y-A/3).real
  a = (z-n)*Po
  b = (z-n)*(1-Po)
  return a,b
# Основной метод программы:
def Bayes(Po,n,gamma):
  Pg = []
  Flag = True
  for i in range(n):
    if Flag:
      Flag = Condition_Check(Po,n,i)
    if Flag:
      a,b = Equation_Solve(Po,n,i)
    else:
      a,b = 0,0
    P_ = 1/(1+(b+i)/(a+n-i)*f.ppf(gamma,2*(b+i), 2*(a+n-i)))
    Pg.append(P_)
  Pg.append(0)
  return Pg
```

Например, для исходных данных: P_0 = 0,9, n = 8, γ = 0,8 будет сформирован вектор $\underline{\mathbf{P}}_\gamma^{\text{Байес}}$ = [0,917 0,795 0,629 0,483 0,350 0,228 0,120 0,031 0,000].

Условное биномиальное распределение

Заметим, что при испытаниях n одинаковых КА теоретически возможен n + 1 исход: от 0 до n успешных испытаний. Для простейшего случая (синхронное начало испытания n КА при отсутствии отказов бортовой аппаратуры) вероятность исхода с i успехами определяется по формуле:

$$B_i(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} p(t)^i \left(1 - p(t)\right)^{n-i}, \qquad (21)$$

где $p(t)$ – вероятность успешного испытания для одного КА.

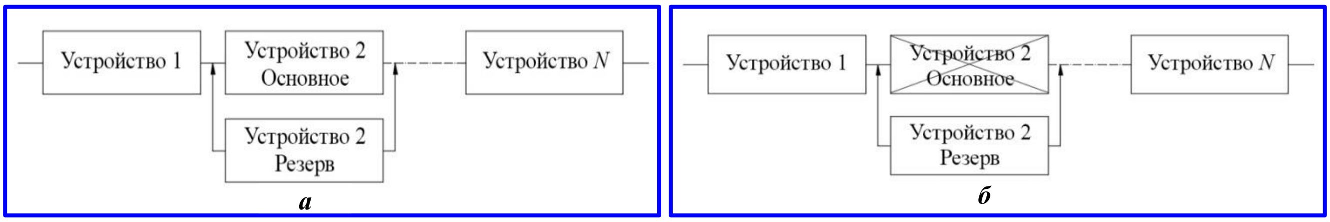

Рис. 2. Вид схемы надежности космического аппарата: *а* – до отказа; *б* – после отказа

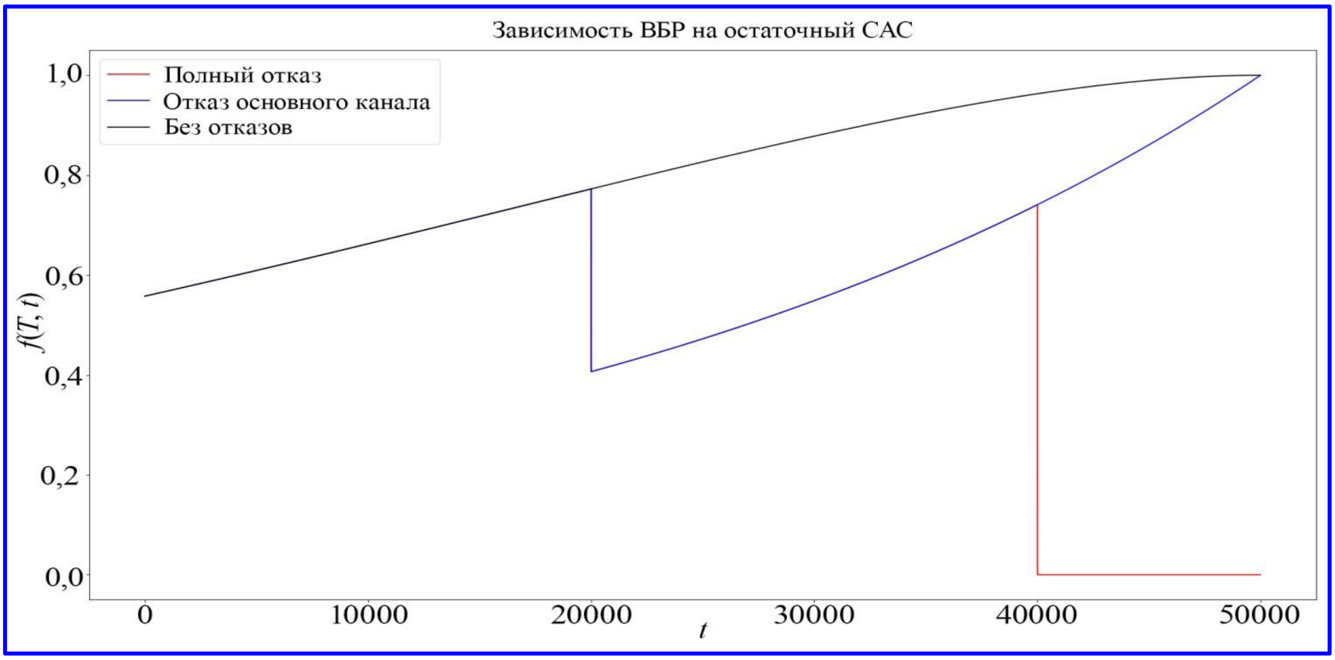

Рис. 3. Зависимость вероятности безотказной работы на остаточный срок активного существования как функция от времени

При этом все возможные исходы образуют полную группу независимых событий:

$$\sum_{i=0}^{n} B_i(t) = 1. \qquad (22)$$

Ввиду того, что заранее известна проектная оценка, а следовательно и структурная схема надежности (ССН) КА, становится возможным рассматривать функцию от времени $p(t)$ как условную вероятность успешного завершения испытания для конкретного КА и получать ее значения для любого произвольного момента времени.

Математическое описание $p(t)$ будет иметь вид:

$$p(t) = \begin{cases} 1 - \text{если испытания КА завершены успешно;} \\ f(T,t) - \text{в процессе испытания КА;} \\ P_0 - \text{до начала испытаний КА,} \end{cases} \qquad (23)$$

где $f(T, t)$ – функция значения ВБР КА, зависящая от текущего времени (t), текущего состояния ССН и нормативного срока активного существования (САС) (T).

В общем случае функция $f(T, t)$ зависит от типа КА, степени проработки его ССН. В простейшем случае для ССН вида, показанного на рис. 2, *а*, *б*, математическое описание для экспоненциального закона распределения отказов имеет вид: до отказа (рис. 2, *а*) и после отказа (рис. 2, *б*).

$$f(T,t) = \begin{cases} e^{(-\lambda_1(T-t))}\left(e^{(-\lambda_2(T-t))}\left(1+\lambda_2(T-t)\right)\right)\cdots e^{(-\lambda_N(T-t))}, & 0 \le t < \tau, \\ e^{(-\lambda_1(T-t))}e^{(-\lambda_2(T-t))}\cdots e^{(-\lambda_N(T-t))}, & \tau \le t \le T, \\ 1, & T < t, \end{cases} \qquad (24)$$

где τ – момент отказа основного устройства.

В момент отказов $f(T, t)$ претерпевает скачкообразные изменения так, как показано на рис. 3.

Подставляя (24) в (21), могут быть получены графики вероятностей исходов для различных ситуаций, как показано на рис. 4, 5.

В общем случае $f(T, t)$ является уникальной функцией (изменения ССН) для каждого КА. На рис. 4, *б* иллюстрируется случай, когда один из одновременно запускаемых КА постепенно отказывает.

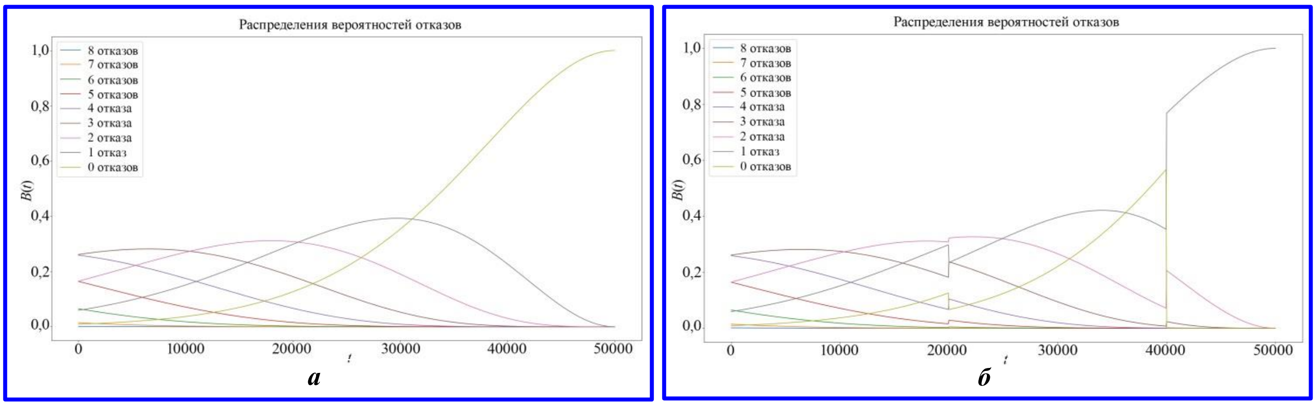

Рис. 4. Зависимость вероятностей исходов на остаточный срок активного существования от времени для случая одновременного запуска космических аппаратов: *а* – без возникновения отказов; *б* – при наличии отказа

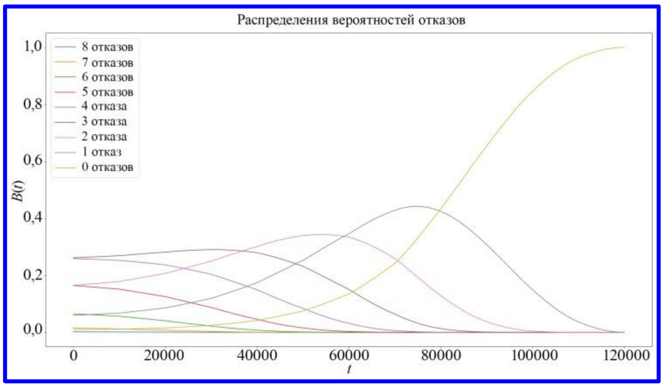

Рис. 5. Зависимость вероятностей исходов на остаточный срок активного существования от времени для случая разновременного запуска космических аппаратов

Также различные значения $f(T, t)$ возникают и для случая несинхронного запуска КА, представленного на рис. 5.

Как видно, рис. 4, *б* и 5 имеют характерные изломы графиков в моменты отказов (рис. 4, *б*) или окончания САС (рис. 5).

Как было показано, ВБР на остаточный САС может быть вычислена в любой произвольный момент времени для каждого КА отдельно. Тогда, используя формулу (24), для системы из n КА может быть получен вектор ВБР на остаточный САС:

$$\mathbf{p}(t) = [p_0(t)p_1(t) \cdots p_n(t)], \tag{25}$$

координаты которого характеризуют каждый КА системы.

Учитывая свойство полной группы событий (22) и обобщая формулу (21), этот вектор используется в качестве исходных данных для вычисления вектора вероятностей исходов:

$$\mathbf{B} = [B_0, B_1 \cdots B_n]. \tag{26}$$

Координаты вектора вычисляются в соответствии с правилами комбинаторного перебора, например:

$$\begin{gathered} B_0 = p_0(t)\,p_1(t)\cdots p_n(t), \\ B_1 = \left(1-p_0(t)\right)p_1(t)\cdots p_N(t) + p_0(t)\left(1-p_1(t)\right)\cdots p_n(t) + \cdots + \\ + p_0(t)\,p_1(t)\cdots\left(1-p_n(t)\right), \\ B_n = \left(1-p_0(t)\right)\left(1-p_1(t)\right)\cdots\left(1-p_n(t)\right). \end{gathered} \tag{27}$$

Каждая координата вектора **B** является условной вероятностью наступления события, характеризующей конкретное количество отказов, и может быть вычислена для произвольного момента времени.

Для решения прикладных задач ниже приводится листинг кода программы-прототипа на языке Python, результатом которого является сформированный вектор **B**:

```
def Binom(List):
  B = []
  k = len(List)
  for i in range(k+1):
    B.append(0)
  for i in range(2**k):
    c,p = 0,1
    for j in range(k-1,-1,-1):
      t = 1&(i>>j)
      c += t
      p*= List[j-1] if t else 1 - List[j-1]
    B[k-c] += p
  return B
```

Например, для исходных данных [0,9 0,9 0,81 0,91 0,83 0,93 0,93 0,95] будет сформирован вектор:

B = [0,407173050 0,392384408 0,159435101 0,035735145 0,004843527 0,000407375 0,000020797 0,000000590 0,000000007].

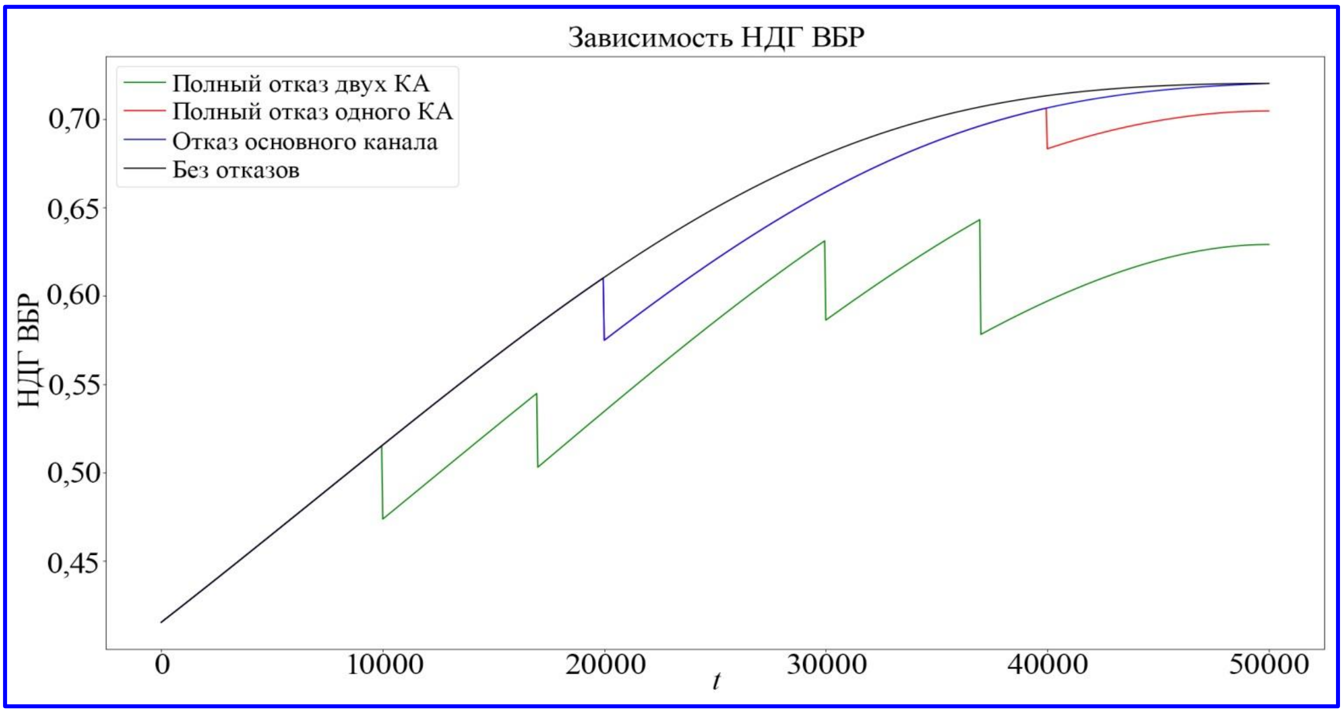

Рис. 6. Зависимости оценки нижней доверительной границы вероятности безотказной работы от времени для случаев отказов космических аппаратов

Оценка показателя надежности

Сформировав вектор **B**, характеризующий условные вероятности наступления событий, соответствующих каждому из теоретически возможных отказов, а также имея вектор $\underline{\mathbf{P}}_{\gamma}^{\text{Байес}}$, содержащий оценки НДГ ВБР для соответствующих количеств отказов, итоговую оценку предлагается выполнять как математическое ожидание оценки:

$$\underline{\mathbf{P}}_{\gamma} = \underline{\mathbf{P}}_{\gamma}^{\text{Байес}} \cdot \mathbf{B}. \tag{28}$$

Особенностью такого подхода является тот факт, что к моменту завершения испытаний математическое ожидание оценки НДГ ВБР будет асимптотически стремиться к одному из значений координаты вектора $\underline{\mathbf{P}}_{\gamma}^{\text{Байес}}$, то есть в конечном счете результат сойдется с тем значением, которое может быть получено «классическим» методом байесовского оценивания.

На рис. 6 показаны графики изменения оценки НДГ ВБР, получаемые предложенным методом, в зависимости от момента времени оценки.

Как видно из рис. 6, в моменты отказов элементов ССН КА графики претерпевают скачкообразные изменения, но продолжают асимптотическое стремление к конкретным значениям оценок.

Таким образом, предлагаемый механизм использования метода байесовской оценки НДГ ВБР КА для произвольного момента времени является математически непротиворечивым и позволяет проводить оценку до полного завершения испытаний.

Выводы

Предложен математически непротиворечивый метод оценки НДГ ВБР КА с использованием метода байесовского оценивания при частичной априорной определенности по схеме биномиальных испытаний. В отличие от «классического» подхода предложенный метод позволяет получать оценки до окончания испытаний, например, в моменты окончания наземной экспериментальной отработки, летных испытаний или произвольный момент времени в процессе эксплуатации.

Данными для расчета предлагаемым методом являются:

– количество КА в системе;

– ССН и проектная оценка ВБР КА;

– тип и моменты времени изменений ССН в процессе фактической работы КА;

– уровень доверия оценки.

Предложенный подход не требует специфических исходных данных и легко реализуем средствами математического программирования.

Литература

1. Савчук В. П. Байесовские методы статистического оценивания. Надежность технических объектов / В. П. Савчук. – Москва: Наука, 1989. – 322 с.

2. Натан А. А., Горбачёв О. Г., Гуз С. А. Математическая статистика : учеб. пособие / А. А. Натан, О. Г. Горбачёв, С. А. Гуз. – Москва: МЗ Пресс, 2004. – 156 с.

3. Сухорученков Б. И. Анализ малой выборки. Прикладные статистические методы / Б. И. Сухорученков. – Москва: Вузовская книга, 2010. – 384 с.

Поступила в редакцию 14.03.2023

***Дмитрий Михайлович Кривопалов**, соискатель, инженер-программист,*
т.: 8 (495) 366-35-83, e-mail: ashyspec@mcc.vniiem.ru.
(АО «Корпорация «ВНИИЭМ»).
***Андрей Евгеньевич Давыдов**, кандидат технических наук, начальник отдела,*
т.: 8 (495) 515-02-34, e-mail: vks_nic_korolev@mil.ru.
(НИЦ (г. Королев) ФГБУ «ЦНИИ ВКС» Минобороны России).
***Руслан Николаевич Барбул**, заместитель генерального директора,*
т.: 8 (495) 366-12-01, e-mail: RNBarbul@hq.vniiem.ru.
(АО «Корпорация «ВНИИЭМ»).

METHODS OF ASSESSMENT OF RELIABILITY INDICES BASED ON THE RESULTS OF FLIGHT TESTS AND OPERATION

D. M. Krivopalov, A. Ye. Davydov, R. N. Barbul

An algorithm for using the method of Bayesian estimates with partial a priori certainty according to the binomial test scheme for assessing the reliability indicators of spacecraft based on the results of flight tests and operation is proposed and mathematically justified. The possibility of its use in incomplete tests, as well as in conditions of a small statistical sample, is shown.
***Key words**: Bayesian estimates, reliability indicators, spacecraft, flight tests.*

References

1. Savchuk V. P. Bayesian methods of statistical estimation. Reliability of technical objects / V. P. Savchuk. – Moscow: Nauka (Science), 1989. – 322 p.
2. Natan A. A., Gorbachyov O. G., Guz S. A. Mathematical statistics : textbook / A. A. Natan, O. G. Gorbachyov, S. A. Guz. – Moscow: MZ Press, 2004. – 156 p.
3. Sukhoruchenkov B. I. Small sample analysis. Applied statistical methods / B. I. Sukhoruchenkov. – Moscow: Vuzovskaya kniga (University Book), 2010. – 384 p.

***Dmitriy Mikhailovich Krivopalov**, External Ph. D. Student, Software Engineer,*
tel.: +7 (495) 366-35-83, e-mail: ashyspec@mcc.vniiem.ru.
(JC «VNIIEM Corporation»).
***Andrey Yevgenievich Davydov**, Candidate of Technical Sciences (Ph. D.),*
Head of Department, tel.: +7 (495) 515-02-34,
e-mail: vks_nic_korolev@mil.ru.
(Central Research Institute of the Aerospace Defence Forces, Research and Testing Center (Korolyov)).
***Ruslan Nikolayevich Barbul**, Deputy Director General, tel.: +7 (495) 366-12-01,*
e-mail: RNBarbul@hq.vniiem.ru.
(JC «VNIIEM Corporation»).