

## КОМПЛЕКСНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ НИЗКООРБИТАЛЬНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ КОНСТРУКЦИИ, ПОДВИЖНОСТИ ЖИДКОГО ТОПЛИВА В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ И ВОЗДЕЙСТВИЯ СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОГО ГАЗА

Г. Г. Ефименко, С. В. Залетаев, Н. В. Скоморохов,  
А. О. Меняйло, О. П. Клишев, А. Л. Кусов,  
А. А. Рассказов, Н. А. Румынский

*Рассматриваются математические модели физических процессов при полёте низкоорбитального космического аппарата. Приводится соответствующая модель возмущённого движения «упругого» космического аппарата с учётом программных поворотов деформируемых элементов его конструкции, а также внешних и управляющих воздействий. Представляется приближённая математическая модель движения жидкого топлива в баках в условиях невесомости и малых перегрузок. Определяются аналитические зависимости сил реакций связей при взаимодействии жидкого топлива со стенками бака. Указывается, что расчёт динамических характеристик упругих колебаний элементов конструкции осуществляется методом конечных элементов, на основе которых рассчитываются коэффициенты упругих связей между упругими колебаниями элементов конструкции изделия и его линейным и угловым движением как твёрдого тела. Приводится разработанная математическая модель расчёта сил молекулярного воздействия на космический аппарат в свободномолекулярном потоке. Отмечается, что указанные модели являются частями комплексной математической модели физических процессов при полёте низкоорбитального космического аппарата и могут использоваться в составе проектов модельно-ориентированного системного проектирования технических объектов.*

**Ключевые слова:** математические модели, динамика, упругие колебания, гидродинамика жидкого топлива, молекулярная динамика в разреженных газах.

Согласно отечественной технологии создания и наземной отработки изделий ракетно-космической техники (РКТ) не предусматривается проведение испытаний собранных ракет-носителей (РН) или космических аппаратов (КА) с раскрытыми трансформируемыми элементами конструкций. Испытания проводятся с использованием макетов, моделей и отдельных сборок изделий. Такая технология обеспечивает хорошие результаты без сооружения гигантских стендов, однако предъявляются повышенные требования к квалификации физиков, математиков, программистов, инженеров и рабочих, участвующих в создании изделий. Как правило, наземная отработка начинается с формирования математических моделей и проведения расчётов в целях определения наиболее критических режимов функционирования изделий.

При создании высокотехнологичной РКТ выдвигаются новые требования к результатам математического моделирования, удовлетворить которые можно только при использовании суперкомпьютеров и технологии параллельных вычислений. Эти технологии позволяют перейти на принципиально другой уровень проведения связанных мультидисциплинарных расчётов функционирования изделий РКТ с использованием высокодетальных компьютерных моделей применительно ко всем участкам траектории полёта.

В последнее время мультидисциплинарное моделирование становится быстро развивающимся трендом в области исследования сложных систем и физических процессов. Оно позволяет разбивать

общую задачу на ряд подзадач, каждая из которых описывается собственным набором уравнений и где используются различные решатели и численные методы. Таким образом, удаётся совместно решать разнообразные задачи математической физики, объединять модели разной размерности и разной масштабности для моделирования функционирования/поведения высокотехнологических изделий.

Использование передовых технологий позволяет объединить частные математические модели в комплексную модель функционирования КА (так называемый цифровой двойник) и в реальном масштабе времени проводить связанные расчёты.

В работе [1] дано следующее определение цифрового двойника: система, состоящая из цифровой модели изделия (при наличии изделия) и двухсторонних информационных связей с ним и (или) его составными частями.

Цифровая модель изделия: система математических и компьютерных моделей, а также электронных документов, описывающих структуру, функциональность и поведение вновь разрабатываемого и эксплуатируемого изделия на различных стадиях его жизненного цикла, применительно к которым на основании цифровых и (или) иных испытаний выполнена согласно ГОСТ 16504-81 [2] оценка соответствия предъявленным к изделию требованиям.

В типовом составе комплексной математической модели функционирования КА на всех участках траектории полёта можно выделить три главные системы моделей: математические модели основных физических процессов, служебных систем и целевой аппара-

туры, которые используются на этапах создания, лёгких испытаний и эксплуатации изделий.

Математические модели основных физических процессов могут включать в себя:

- динамическую;
- упругую;
- гидродинамическую;
- молекулярное обтекание;
- баллистическую;
- тепловую.

Рассмотрим некоторые из них, которые могут быть использованы при создании комплексной математической модели движения низкоорбитального КА.

### Динамическая модель

Предположим, что КА состоит из центрального упругого корпуса и прикреплённых к нему крупногабаритных упругих подконструкций типа панелей солнечных батарей (СБ), антенн и т. д. Упругие подконструкции или их отдельные части посредством приводов могут совершать программные повороты относительно корпуса КА. Тогда уравнения возмущённого движения КА (динамическую модель) можно записать в следующей матричной форме [3, 4]:

$$m\dot{\vec{V}}_1 - \vec{L}\dot{\vec{\omega}}_1 - \vec{\omega}_1(\vec{L}\vec{\omega}_1) + \sum_j \mathbf{a}_{j1}^T \ddot{\mathbf{p}}_j + \sum_j (\mathbf{a}_{j1})^F \ddot{\boldsymbol{\phi}}_j = \vec{F}_y + \vec{F}_b;$$

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}}_1 + \vec{L}\dot{\vec{V}}_1 + \vec{\omega}_1(\mathbf{J}\vec{\omega}_1 + \vec{h}) + \vec{h} + \sum_j \mathbf{b}_{j1}^T \ddot{\mathbf{p}}_j + \sum_j (\boldsymbol{\beta}_{j1})^F \ddot{\boldsymbol{\phi}}_j = \vec{M}_y + \vec{M}_b;$$

$$\mathbf{I}_{rj} \ddot{\boldsymbol{\phi}}_j + \mathbf{a}'_{j1} \dot{\vec{V}}_1 + \boldsymbol{\beta}'_{j1} \dot{\vec{\omega}}_1 + \boldsymbol{\gamma}'_{j1} \ddot{\mathbf{p}}_j = \mathbf{Q}_{rj}; \quad (1)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j \dot{\mathbf{p}}_j + \mathbf{v}_j^2 \mathbf{p}_j + \mathbf{a}_j \dot{\vec{V}}_1 + \mathbf{b}_j \dot{\vec{\omega}}_1 + \boldsymbol{\gamma}_j^T \ddot{\boldsymbol{\phi}}_j + \mathbf{a}_{1j} \boldsymbol{\Psi}_{kj}^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}_{1j} \boldsymbol{\Psi}'_{kj} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_{pj};$$

$$\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\varepsilon} \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{q} + \sum_j \boldsymbol{\Psi}_{kj} \mathbf{a}'_{1j} \ddot{\mathbf{p}}_j + \sum_j \boldsymbol{\Psi}'_{kj} \mathbf{b}'_{1j} \ddot{\mathbf{p}}_j = \mathbf{Q}_q;$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \sum_l \boldsymbol{\Psi}_l \dot{\mathbf{q}}_l; \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \sum_l \boldsymbol{\Psi}'_l \dot{\mathbf{q}}_l,$$

( $l = 1 \dots N$ , где  $N$  – число тонов колебаний корпуса;  $j$  – индекс подконструкции; « $\dot{\phantom{x}}$ » – символ дифференцирования по времени), где  $m$ ,  $L$ ,  $J$  – матрицы масс, статического момента, тензора инерции недеформированного КА в связанной системе координат (ССК);  $I_{rj}$  – диагональная матрица моментов

инерции вращающихся частей подконструкции;  $\vec{V}$ ,  $\vec{\omega}$  – векторы линейной и угловой скорости центра масс КА в возмущённом движении, относительно ССК;  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{\omega}_1$  – векторы линейной и угловой скорости центра масс КА как твёрдого тела в возмущённом движении, относительно ССК;  $\mathbf{p}_j$  – вектор обобщённых координат колебаний  $j$ -й подконструкции;  $\mathbf{q}$  – вектор обобщённых координат колебаний корпуса;  $\boldsymbol{\phi}_j$  – угол поворота подвижных частей подконструкции посредством приводов;  $\vec{F}_b$ ,  $\vec{F}_y$ ,  $\vec{M}_b$ ,  $\vec{M}_y$  – главные векторы и моменты внешних и управляющих сил, действующих на КА;  $\vec{h}$  – момент количества движения ротора относительно несущего тела;  $\dot{\vec{h}}$  – производная по времени от  $\vec{h}$  в базисе, связанном с несущим телом;  $\mathbf{a}_{j1}$ ,  $\mathbf{b}_{j1}$  – прямоугольные матрицы коэффициентов инерционных связей между упругими колебаниями  $j$ -й подконструкции и движением КА, рассчитанные относительно ССК;  $\boldsymbol{\alpha}_{j1}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{j1}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_j$  – прямоугольные матрицы коэффициентов инерционных связей между вращением  $j$ -й подконструкции и движением КА, рассчитанные относительно ССК;  $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ ,  $\mathbf{v}_j^2$  – диагональные матрицы коэффициентов демпфирования и квадратов собственных частот  $j$ -й подконструкции (парциальные характеристики);  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}^2$  – диагональные матрицы коэффициентов демпфирования и квадратов собственных частот упругих колебаний корпуса;  $\boldsymbol{\Psi}_{kj}$ ,  $\boldsymbol{\Psi}'_{kj}$  – матрицы собственных форм упругих колебаний корпуса и их производных в точках крепления  $j$ -й подконструкции;  $\mathbf{Q}_p$ ,  $\mathbf{Q}_q$  – обобщённые силы, действующие на  $j$ -ю подконструкцию и корпус КА;  $\mathbf{Q}_{rj}$  – усилия, приложенные к вращающимся частям  $j$ -й конструкции.

Элементы матриц  $\mathbf{a}'_{j1}$ ,  $\boldsymbol{\beta}'_{j1}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}'_{j1}$  и  $\boldsymbol{\alpha}_{j1}$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{j1}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_j$  имеют следующие зависимости:

$$\boldsymbol{\alpha}_{j1} = \mathbf{I}_{rj}^{-1} \mathbf{a}'_{j1}; \quad \boldsymbol{\beta}_{j1} = \mathbf{I}_{rj}^{-1} \boldsymbol{\beta}'_{j1}; \quad \boldsymbol{\gamma}_j = \mathbf{I}_{rj}^{-1} \boldsymbol{\gamma}'_{j1}.$$

Будем считать, что управляющие воздействия прикладываются только к корпусу КА, тогда  $\vec{F}_y = \vec{F}_{ky}$ ;  $\vec{M}_y = \vec{M}_{ky}$ .

Внешние силы и моменты рассчитываются относительно ССК по формулам:

$$\vec{F}_b = \vec{F}_{bk} + \sum_j \mathbf{A}_{nj}^T \mathbf{A}_{nj}^T \vec{F}_{jb};$$

$$\vec{M}_b = \vec{M}_{bk} + \sum_j \mathbf{A}_{nj}^T \mathbf{A}_{nj}^T \vec{M}_{jb} + \sum_j \tilde{\mathbf{p}}_j \mathbf{A}_{nj}^T \mathbf{A}_{nj}^T \vec{F}_{jb}.$$

К внешним возмущениям относятся воздействия на КА магнитного поля Земли, гравитационного поля, давления солнечного излучения, а также силы и моменты, возникающие при столкновении молекул атмосферы с поверхностью КА.

Инерционно-массовые характеристики и коэффициенты системы уравнений возмущённого движения КА могут быть рассчитаны по соответствующим характеристикам составляющих его частей следующим образом:

$$\begin{aligned}
 m &= m_k + \sum_j m_j; \\
 \bar{L} &= \bar{L}_k + \sum_j m_j \bar{\rho}'_j; \\
 \mathbf{J} &= \mathbf{J}_{\text{кц}} + m_k \left[ \mathbf{E} \begin{pmatrix} -\bar{\rho}_k^T \bar{\rho}_k \\ \bar{\rho}_k \bar{\rho}_k^T \end{pmatrix} - \bar{\rho}_k \bar{\rho}_k^T \right] + \\
 &+ \sum_j \mathbf{J}'_{j\text{ц}} + m_j \left[ \mathbf{E} \begin{pmatrix} -\bar{\rho}'_j{}^T \bar{\rho}_j \\ \bar{\rho}'_j \bar{\rho}_j^T \end{pmatrix} - \bar{\rho}'_j \bar{\rho}_j^T \right]; \\
 \bar{\rho}'_j &= \bar{\rho}_{kj} + \mathbf{A}_{\text{Hj}}^T \mathbf{A}_{\text{nj}}^T \bar{\rho}_j; \\
 \mathbf{J}'_{j\text{ц}} &= \mathbf{A}_{\text{Hj}}^T \mathbf{A}_{\text{цj}}^T \mathbf{J}_{j\text{ц}} \mathbf{A}_{\text{цj}} \mathbf{A}_{\text{Hj}}; \\
 \mathbf{a}_{j1} &= \mathbf{a}_j \mathbf{A}_{\text{Hj}} \mathbf{A}_{\text{nj}}; \\
 \mathbf{b}_{j1} &= \mathbf{b}_j \mathbf{A}_{\text{Hj}} \mathbf{A}_{\text{nj}} + \mathbf{a}_{j1} \mathbf{R}_{0j}; \\
 \mathbf{\alpha}_{j1} &= \mathbf{A}_{\text{Hj}}^T \mathbf{A}_{\text{nj}}^T \mathbf{\alpha}_j; \\
 \mathbf{\beta}_{j1} &= \mathbf{A}_{\text{Hj}}^T \mathbf{A}_{\text{nj}}^T \mathbf{\beta}_j + \mathbf{R}_{0j}^T \mathbf{\alpha}_{j1}; \\
 \mathbf{R}_{0j} &= L(\bar{\rho}_{0j}),
 \end{aligned}$$

где  $L(\bar{a})$  или  $\tilde{\mathbf{a}}$  матричная функция вектора  $\bar{a}$ , определяемая зависимостью

$$L(\bar{a}) = \tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & a_z & -a_y \\ -a_z & 0 & a_x \\ a_y & -a_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Остальные обозначения в соотношениях:  $m_k, m_j$  – масса корпуса, упругих элементов конструкции соответственно;  $\mathbf{A}_{\text{Hj}}$  – матрица преобразования опорной системы координат  $j$ -й подконструкции (ОСК $_j$ ), соответствующая начальной ориентации, относительно центральной системы координат корпуса (ЦСК);  $\mathbf{A}_{\text{nj}}$  – матрица преобразования ОСК $_j$  из начального положения в текущее;  $\mathbf{A}_{\text{цj}}$  – матрица преобразования центральной системы координат  $j$ -й подконструкции (ЦСК $_j$ ) из ее начального положе-

ния в текущее;  $\bar{L}_k, \mathbf{J}_{\text{кц}}$  – статический момент корпуса, тензор инерции корпуса относительно ЦСК;  $\mathbf{J}_{j\text{ц}}, \mathbf{J}'_{j\text{ц}}$  – тензор инерции  $j$ -й подконструкции относительно, соответственно, ЦСК $_j$  и ЦСК;  $\bar{\rho}_j, \bar{\rho}'_j$  – радиус-вектор центра масс  $j$ -й подконструкции в ОСК $_j$ , в ССК;  $\bar{\rho}_k, \bar{\rho}_{kj}$  – радиус-вектор центра масс корпуса и точки крепления  $j$ -й подконструкции в ССК;  $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$  – прямоугольные матрицы коэффициентов инерционных связей между упругими колебаниями  $j$ -й подконструкции и движением КА, рассчитанные относительно ОСК $_j$ ;  $\mathbf{\alpha}_j, \mathbf{\beta}_j$  – прямоугольные матрицы коэффициентов инерционных связей между вращением  $j$ -й подконструкции и движением КА, рассчитанные относительно ОСК $_j$ ;  $\bar{F}_{bk}, \bar{F}_{jb}, \bar{M}_{bk}, \bar{M}_{jb}$  – главные векторы и моменты внешних сил, действующих на корпус и  $j$ -ю подконструкцию.

Уравнения (1) описывают движение «упругого» КА, состоящего из упругого корпуса и прикреплённых к нему деформируемых, вращающихся посредством приводов подконструкций. При вращении подконструкции изменение инерционных характеристик КА может учитываться на каждом шаге интегрирования уравнений (1), а коэффициенты, определяющие упругие свойства подконструкций в зависимости от поворота отдельных её частей, должны рассчитываться параллельно при различных положениях подконструкций (с использованием, например, пакета программ (ПП) «Логос» [5]).

### Упругая модель

Расчёт упругих собственных форм и частот упругих колебаний элементов конструкции КА (подконструкций) осуществляется методом конечных элементов путём решения краевой задачи:

$$[\mathbf{M}_k] \{\ddot{\mathbf{X}}_k\} + [\mathbf{K}_k] \{\mathbf{X}_k\} = \{\mathbf{0}\}.$$

В этом случае условия нормировки можно представить в следующем виде:

$$[\boldsymbol{\Psi}_k]^m [\mathbf{M}_k] [\boldsymbol{\Psi}_k] = [\mathbf{1}]; [\boldsymbol{\Psi}_k]^m [\mathbf{K}_k] [\boldsymbol{\Psi}_k] = [\boldsymbol{\Omega}^2],$$

где  $[\mathbf{M}_k]$  и  $[\mathbf{K}_k]$  – конечно-элементные матрицы масс и жёсткостей подконструкций размерностью  $(N_k \times N_k)$ ;  $[\mathbf{1}]$ ,  $[\boldsymbol{\Omega}^2]$  – диагональная единичная матрица и матрица квадратов собственных частот упругих колебаний размерностью  $N_k \times N_k$ ;  $[\boldsymbol{\Psi}_k]$  – квадратная матрица собственных форм колебаний

конструкции, где формы соответствующих тонов колебаний расположены по столбцам матрицы.

В уравнениях динамики упругие смещения представляются как разложение в ряд по собственным формам колебаний закреплённой в точках соединения с корпусом подконструкции. При этом элементы матриц  $\mathbf{a}_j$  и  $\mathbf{b}_j$  определяются так:

$$\bar{\mathbf{a}}_{ji} = \int \bar{\psi}_{ji} dm_j; \bar{\mathbf{b}}_{ji} = \int \tilde{\mathbf{r}}_j \bar{\psi}_{ji} dm_j$$

( $i = 1 \dots, n_j$ , где  $n_j$  – число тонов колебаний  $j$ -й подконструкции).

Элементы векторов  $\bar{\mathbf{a}}_{ji}$  и  $\bar{\mathbf{b}}_{ji}$  составляют  $i$ -ю строку матриц  $\mathbf{a}_j$  и  $\mathbf{b}_j$ .

Элементы матриц  $\mathbf{a}_j$  и  $\mathbf{b}_j$  характеризуют инерционную связь между поступательным движением и вращением поворотных частей подконструкции и подконструкции в целом и равны статическим моментам и моментам инерции вращающихся частей, рассчитанными относительно осей приводов.

Элементы матриц  $\mathbf{a}_{ji}$ ,  $\mathbf{b}_{ji}$ ,  $\mathbf{c}_j$  определяют инерционную связь между движением частей подконструкции как твёрдого тела и упругими колебаниями. Находятся аналогично приведённым соотношениям, в которых интегрирование проводится только по массе вращающихся частей.

В качестве основной программы расчёта динамических характеристик КА предполагается использовать ПП «Логос» [5].

### Гидродинамическая модель

На борту современных КА с большим сроком активного существования расположены баки с жидким топливом, масса которого может составлять 30% от массы всего изделия. С точки зрения математического описания динамических свойств КА с подвижным топливом в баках обычно выделяют две фазы полёта, которые характеризуются разными динамическими свойствами топлива и поэтому математически представляются разными уравнениями движения.

Применительно к так называемым активным участкам полёта, когда работает маршевый двигатель, для определения влияния подвижности жидкого топлива используются механические аналоги в виде маятниковой модели или модели осциллятора, которые обеспечивают хорошее приближение к реальным физическим процессам [6].

В отношении участков полёта КА, на которых воздействуют слабое гравитационное поле и малые инерционные силы, а жидкость в баках имеет

свободную поверхность, не существует единого подхода в математическом описании динамики объектов с полостями, частично заполненными топливом [7]. Это обусловлено двумя основными причинами:

- сложностью подтверждения правильности тех или иных математических описаний ввиду дороговизны воспроизведения условий невесомости и действия слабых гравитационных сил;

- многообразием факторов, определяющих поведение топлива в баках, включая геометрические формы и размеры баков и внутрибаковых устройств, начальные условия, характеристики системы управления и управляющих двигателей систем ориентации, стабилизации и коррекции.

Эти факторы практически для каждого нового КА различны, что существенно усложняет системный подход к решению задачи математического описания динамики топлива в условиях микрогравитации.

В настоящее время не существует отечественных программных пакетов расчёта сеточными методами гидродинамики жидкого топлива в условиях микрогравитации. Использование зарубежного программного обеспечения (ПО), например ПП Ansys, для решения указанных задач не даёт адекватных результатов.

Реальные массово-инерционные характеристики КА на различных участках полёта являются переменными по времени, что определяется перемещениями топлива внутри баков под действием кратковременных перегрузок в области слабых гравитационных полей, включая невесомость, а также программными поворотами отдельных подконструкций. Инженерная методика расчёта влияния на динамику КА подвижности жидкого топлива в баках представлена в работе [7]. Согласно ей жидкое топливо в каждом баке заменяется точечной массой  $m_i$  ( $i = 1, 2$ ), соответствующей массе топлива, совершающей движение внутри поверхностей  $S_i$ , представляющей собой геометрическое место центров масс жидкости в  $i$ -м баке. Показано [7], что поверхности  $S_i^+$  и  $S_i^-$  описываются уравнениями:

$$\left[ \frac{x}{a_i} \right]^2 + \left[ \frac{y^2 + z^2}{b_i^2} \right] = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Образующие поверхностей  $S_i^+$  и  $S_i^-$  являются полуэллипсами, у которых поперечная полуось  $b_i$ , общая, а продольные полуоси разные ( $a_i^+$ ,  $a_i^-$ ).

Для определения совместного влияния колебаний упругих элементов конструкции и подвижности жидкого топлива в баках необходимо использовать систему уравнений (1). В целях упрощения уравнений предположим, что на КА действуют малые внешние и управляющие силы и моменты. Тогда амплитуды упругих колебаний и перемещение топлива в баках также будут малыми величинами. Совместное влияние указанных особенностей конструкции можно рассматривать как суперпозицию двух независимых явлений.

В этом случае уравнения движения «сухого» и твёрдого КА можно представить в следующей векторной форме:

$$m_0 \ddot{\vec{r}}_O = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i + \vec{F}_B; \quad (3)$$

$$\mathbf{I}_0 \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\mathbf{I}_0 \vec{\omega}) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{O_i} \times \vec{R}_i + \vec{M}_B, \quad (4)$$

где  $m_0$  – масса «сухого» КА (без жидкого топлива), называемого твёрдым телом;  $\mathbf{I}_0$  – тензор инерции твёрдого тела относительно его центра масс  $O$ ;  $\vec{r}_O$  – радиус-вектор центра масс  $O$  твёрдого тела относительно начала стартовой системы координат;  $\vec{\omega}$  – вектор угловой скорости твёрдого тела;  $\vec{r}_{O_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – радиус-вектор точки приложения силы реакции связей  $R_i$  к стенкам  $i$ -го бака,

$$\vec{r}_{O_i} = \vec{\rho}_{O_i} + \vec{\rho}_i + \Delta \vec{\rho}_i,$$

где  $\vec{\rho}_{O_i}$  – радиус-вектор центра поверхности  $S_i$  относительно центра масс твёрдого тела  $O_i$ ;  $\vec{\rho}_i$  – радиус-вектор точки поверхности  $S_i$ , в которой находится масса  $m_i$  относительно центра поверхности  $S_i$ ;  $\Delta \vec{\rho}_i$  – радиус-вектор, параллельный  $\vec{\rho}_i$ , проведённый из его окончания до пересечения со стенками бака;  $\vec{F}_B, \vec{M}_B$  – векторы управляющих и возмущающих сил и моментов, действующих на КА,

$$\vec{F}_B = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^c + \sum_{j=1}^m \vec{F}_j^D + \vec{F}^A;$$

$$\vec{M}_B = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^c + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j^D + \sum_{i=1}^{m+N} \vec{M}^* + \vec{M}^A + \vec{M}^G + \vec{M}^S;$$

где  $\vec{F}_i^c, \vec{M}_i^c$  – сила и момент, создаваемые  $i$ -м управляющим двигателем;  $\vec{F}_j^D, \vec{M}_j^D$  – сила и момент, создаваемые  $j$ -м соплом дренажа;  $\vec{F}^A = \frac{1}{2} \rho_a c_x S |\dot{\vec{r}}_0| \dot{\vec{r}}_0$ ;  $\vec{M}^A$  – сила и момент, возникающие при столкновении молекул с поверхностью КА;  $\vec{M}^G$  – гравитационный момент;  $\vec{M}^*$  – момент, обусловленный технологическими погрешностями установки двигателей и дренажных сопел;  $\vec{M}^S$  – момент, обусловленный солнечным давлением;  $N, m$  – количество управляющих двигателей и сопел дренажа соответственно.

### Определение сил реакции

Сила реакции  $R_i$  в точке контакта массы  $m_i$  с поверхностью  $S_i$  складывается из двух составляющих  $\vec{F}_{ni} = F_{ni} \vec{n}_i$  – нормальной и  $\vec{F}_{ti} = \kappa_i \vec{g}_{ti}$  – тангенциальной;  $\vec{n}_i = \frac{\vec{N}_i}{|\vec{N}_i|}$  – единичный вектор нормали. Тогда уравнение движения точечной массы  $m_i$  относительно твёрдого тела под действием силы реакции  $R_i$  имеет вид:

$$\ddot{\vec{\rho}}_i = \vec{F}_B / m_0 - \sum_{j=1}^n (\vec{F}_{nj} + \kappa_j \vec{v}_{ti}) / m_0 - (\vec{F}_{ni} + \kappa_i \vec{v}_{ti}) / m_i - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_i - \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{O_i}), \quad (5)$$

Исходя из условия, что  $\vec{\rho}_i$  должно удовлетворять уравнению (2), получим уравнение связи применительно к  $i$ -й точечной массе

$$\ddot{\vec{\rho}}_i \vec{N}_i + \dot{\vec{N}}_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

где  $\vec{N}_i$  – вектор нормали к поверхности в точке расположения точечной массы  $m_i$ .

Если поверхность  $S_i$  задана уравнением:

$$S_i(x, y, z) = 0,$$

то  $N_i = \text{grad } S_i$  и

$$\dot{\vec{\rho}}_i \dot{\vec{\rho}}_i = \dot{x}_i^2 a_{ix} + \dot{y}_i^2 a_{iy} + \dot{z}_i^2 a_{iz}, \quad (7)$$

где  $x_i, y_i, z_i$  – координаты вектора  $\vec{\rho}_i$  в связанной системе

$$a_{ix} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}; \quad a_{iy} = \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}; \quad a_{iz} = \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}.$$

При наличии на космическом аппарате двух баков, используя уравнение связи (6) и уравнения движения (3) – (5), получим следующую систему линейных уравнений для определения нормальных составляющих сил реакции  $F_i$ :

$$\mathbf{A} \mathbf{F}_n = \mathbf{B} \tag{8}$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица размерностью  $n \times n$  с элементом  $a_{ij}$ ;

$$\mathbf{F}_n = (F_{n1}, F_{n2}, \dots, F_{nn}), \mathbf{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n);$$

$$a_{ii} = N_i \left[ 1 / \bar{m}_i - \bar{n}_i (\bar{r}_{0i} \times \bar{\Pi}_{ni}) \right];$$

$$a_{ij} = N_i \left[ (\bar{n}_i \cdot \bar{n}_j) / m_0 - \bar{n}_i (\bar{r}_{0i} \times \bar{\Pi}_{nj}) \right];$$

$$b_i = N_i (\bar{A}_i \bar{n}_i) + \dot{x}_i^2 a_{ix} + \dot{y}_i^2 a_{iy} + \dot{z}_i^2 a_{iz};$$

$$\bar{m}_i = m_0 m_i / (m_0 + m_i); \quad \bar{\Pi}_{ni} = \mathbf{I}_0^T (\bar{r}_{0i} \times \bar{n}_i),$$

$J_x, J_y, J_z$  – главные центральные моменты инерции твёрдого тела;  $J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$  – центробежные моменты инерции твёрдого тела;

$$\begin{aligned} \bar{A}_i = & \bar{r}_{0i} \times \bar{\Pi}_w^0 - 2\bar{F}_{ki} - \bar{\Omega} - \kappa_i \bar{v}_{ii} / m_i - \\ & - \sum_{j=1}^n \kappa_j \bar{v}_{ij} / m_0 + \sum_{j=1}^n \kappa_j \bar{v}_{ii} (\bar{r}_{0i} \times \bar{\Pi}_{ij}); \end{aligned}$$

$$\bar{\Pi}_w^0 = \mathbf{I}_0^T [-\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \mathbf{I}_0)]; \quad \bar{F}_{ki} = \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}_i; \quad \bar{\Omega} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{0i});$$

$$\bar{\Pi}_{ii} = \mathbf{I}_0^T (\bar{r}_{0i} \times \bar{\tau}_i);$$

$$\bar{\tau}_i = \bar{v}_{ii} / v_{ii}; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Коэффициенты  $a_{ij}, b_j$  системы уравнений (8) зависят от координат и скоростей КА и точечных масс, а также от значений частных производных функций  $F_i(x, y, z)$  в той точке поверхности  $S_i$ , в которой находится в данный момент времени  $m_i$ .

Полученная таким образом полная система дифференциальных уравнений описывает движение КА с учётом влияния движения остатков жидкого топлива, представленного в виде точечных масс. Силы реакции, действующие со стороны жидкости на изделие, определяются на каждом шаге интегрирования системы дифференциальных

уравнений, исходя из решения системы линейных уравнений (8). В предлагаемой динамической модели движения остатков топлива введена сила сопротивления (коэффициент вязкого трения  $k_i$ ) при движении точечной массы по поверхности  $S_i$ . Коэффициент вязкого трения  $k_i$  топливных баков целесообразно определять экспериментально.

### Молекулярное обтекание космического аппарата

При движении в атмосфере Земли на низких орбитах КА испытывает сопротивление атмосферы, ввиду чего его орбита постепенно снижается. Для оценки этого снижения необходимо определить силы молекулярного воздействия (СМВ) на КА в свободномолекулярном потоке. С помощью самой простейшей модели коэффициент сопротивления можно оценить исходя из формулы Ньютона

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho_\infty S_m U_\infty^2} = \frac{\rho_\infty S_m U_\infty^2}{\frac{1}{2} \rho_\infty S_m U_\infty^2} = 2,$$

где  $C_x$  – коэффициент сопротивления;  $F_x$  – сила, действующая на КА в продольном направлении;  $\rho_\infty, U_\infty$  – плотность и скорость набегающего потока;  $S_m$  – площадь миделевого сечения. Эта формула позволяет получить адекватные результаты в случае полной аккомодации поступательной энергии молекул на поверхности. Для определения момента она неприменима. Чтобы установить параметры разреженного газа, различными способами решают уравнение Больцмана. В рассматриваемом случае течение свободномолекулярное. При учёте только однократных столкновений молекул с поверхностью КА для определения силы, действующей при заданной ориентации, необходимо вычислить интеграл по его поверхности:

$$\begin{aligned} F_x = & \rho_\infty U_\infty \iint_S \left( \alpha (U_\infty - \bar{l} \cdot \bar{n}) \Omega_W - 2(1 - \alpha) U_\infty \bar{l} \cdot \bar{n} \right) P dS = \\ & = \iint_S \bar{l}^2 \cdot \bar{\tau} \cdot \bar{n} dS; \\ \Omega_W = & \sqrt{\frac{8kT_W}{\pi m}}. \end{aligned}$$

В этой формуле использована зеркально-диффузная модель взаимодействия молекул с поверхностью;  $\bar{l}$  – направление скорости  $U_\infty$ ;  $\bar{n}$  – местная внешняя нормаль к поверхности;  $\alpha$  – коэффициент аккомодации поступательной энергии (он также равен вероятности диффузного отраже-

ния);  $k$  – постоянная Больцмана;  $T_w$  – температура поверхности КА;  $m$  – масса молекул;  ${}^2\bar{\tau}$  – тензор напряжений ранга 2; с помощью функции  $P$  учитывается частичное затенение поверхности.

Момент сил относительно некоторой точки с радиусом-вектором  $\bar{r}_0$  (обычно в качестве  $\bar{r}_0$  берут центр масс КА) определяется аналогично

$$\bar{M}_0 = \oint_S (\bar{r} - \bar{r}_0) \times {}^2\bar{\tau} \cdot \bar{n} dS.$$

При многократном столкновении молекул аналитическую формулу выписать уже невозможно. Для вычисления интеграла используют метод трассировки вдоль траектории молекул и метод прямого статистического моделирования Монте-Карло (ПСМ). В данной работе для оценки СМВ на КА был выбран метод ПСМ как наиболее простой в реализации, поскольку требуется меньшая расчётная сетка, позволяющий учесть многократное рассеяние и сложные модели взаимодействия молекул с поверхностью. Попутно при необходимости метод ПСМ позволяет решать задачу о собственной атмосфере КА, о взаимодействии струй двигателей стабилизации с набегающим потоком. Несомненным преимуществом метода ПСМ является то, что он хорошо поддаётся распараллеливанию с запуском испытаний на разных ядрах. В соответствии с создаваемым программным комплексом предлагается проводить расчёт обтекания КА с определением СМВ на  $M$  ядрах одновременно в  $M$  точках по траектории. Для реализации расчёта необходимо построение пространственной расчётной сетки вокруг триангулированной поверхности КА и заданной, например, в формате STL.

Самую большую погрешность при определении снижения КА обуславливает неопределённость в параметрах атмосферы. Плотность атмосферы существенно меняется в зависимости от времени суток, времени года и активности Солнца (потока солнечной энергии). Причём параметры атмосферы меняются с задержкой по сравнению с изменением активности Солнца.

Метод прямого статистического моделирования Монте-Карло основан на воспроизведении процесса, который имитирует движение молекул газа, столкновение их между собой и взаимодействие молекул с границами рассматриваемой области.

Используются следующие модели: модель твёрдых сфер переменного диаметра, метод мажорантной частоты, модель полной энергии, модель Ларсена – Боргнакке, модель Бойда для опре-

деления скорости релаксации энергии внутренних степеней свободы.

К зависимости вязкости от температуры вида  $\mu \sim T^0$  приводит модель, согласно которой диаметр сталкивающихся частиц сортов  $i$  и  $j$  зависит от относительной скорости таким образом:

$$d_{ij} \sim d_{ij}^{ref} \sqrt{\left(\frac{2kT_{ref}}{m_{ij}g^2}\right)^{\omega_{ij}-1/2} \frac{1}{\Gamma(5/2-\omega_{ij})}}, \quad (9)$$

где  $d_{ij}^{ref}$ ,  $c_{ij}^{ref}$  – постоянные, соответствующие частицам сортов  $i$  и  $j$ , но требующие определения величины;  $m_{ij} = m_i m_j / (m_i + m_j)$  – приведённая масса сталкивающихся частиц;  $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$  – гамма-функция.

Рассеяние в модели VHS предполагается изотропным, т. е. дифференциальное сечение  $\sigma$  и угол рассеяния  $\chi$  рассчитываются как

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d^2}{4}; \quad \chi = 2 \arccos(b/d), \quad (10)$$

где  $b$  – прицельное расстояние;  $d\Omega = \sin(\chi) d\chi d\varphi$  – элемент телесного угла.

Вязкость в модели твёрдых шаров переменного диаметра определяется так:

$$\mu_{ij} = \frac{15}{8} \sqrt{2\pi m_{ij} K T_{ref}} \frac{1}{\pi (d_{ij}^{ref})^2} \frac{1}{(3,5 - \omega_{ij})} \frac{1}{(2,5 - \omega_{ij})} \times (T/T_{ref})^{\omega_{ij}}. \quad (11)$$

С помощью вычисленных вязкостей были подобраны параметры VHS-модели применительно к сталкивающимся парам частиц.

Согласно теории Паркера время вращательной релаксации является функцией температуры вида:

$$\frac{\tau_{RT}}{\tau_c} = Z_R = \frac{Z_R^\infty}{1 + \frac{\pi^{3/2}}{2} \left(\frac{T_*}{T}\right)^{1/2} + \frac{T_*}{T} \left(\frac{\pi^2}{4} + \pi\right)}, \quad (12)$$

где  $Z_R^\infty, T_*$  – константы;  $\tau_c$  – время свободного пробега молекул;  $Z_R$  – среднее число столкновений, необходимое для релаксации вращательной температуры в сторону поступательной.

В работах Я. Д. Бойда был предложен алгоритм, в котором лишь доля столкновений молекул, равная  $P_{RT}$ , приводит к изменению вращательной энергии молекул. Вероятность изменения вращательной энергии зависит от относительной скорости сталкивающихся частиц. Я. Д. Бойдом предложена зависимость:

$$P_{RT} = \frac{1}{Z_{R\infty}} \left( 1 + \frac{\Gamma(2-\eta)}{\Gamma(1,5-\eta)} \sqrt{\frac{kT_*}{E_C}} \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2} + (1-\eta) \frac{kT_*}{E_C} \left( \frac{\pi^2}{4} + \pi \right) \right); \quad (13)$$

$$\eta = \omega_{ij} - \frac{1}{2} - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2},$$

где  $\xi_1, \xi_2$  – число внутренних степеней свободы первой и второй сталкивающихся молекул;  $E_C$  – полная энергия столкновения.

Также в упомянутых работах предложено ввести вероятность поступательно-колебательного (VT) обмена в виде:

$$P_{VT} = \frac{1}{Z_0} g^{3+2(\omega_{ij}-1/2)} \exp(-g^*/g), \quad g = \sqrt{\frac{2E_C}{m_{ij}}}, \quad (14)$$

где параметр  $\alpha$  выражен через параметр VHS-модели как  $\alpha = 3 + 2(\omega_{ij} - 1/2)$ .

Считается, что при больших температурах  $\rho_{VT} \approx \text{const}$ . К такой зависимости приводит вероятность VT-обмена:

$$P_{VT} = \frac{1}{Z_2} g^{2\omega_{ij}}, \quad g = \sqrt{\frac{2E_C}{m_{ij}}}. \quad (15)$$

Время VT-релаксации с учётом высокотемпературной коррекции выражается как:

$$P_{VT} = \min \left[ \frac{1}{Z_0} g^{3+2(\omega_{ij}-1/2)} \exp(-g^*/g), \frac{1}{Z_2} g^{2\omega_{ij}} \right], \quad (16)$$

$$g = \sqrt{\frac{2E_C}{m_{ij}}}.$$

Параметр  $g^*$  удобно выразить через параметр  $a$  потенциала взаимодействия Борна – Майера, а именно:

$$g^* = \frac{4\pi^2 \theta_V c a}{c_2}, \quad (17)$$

где  $\Theta_V$  – колебательный квант, выраженный в градусах Кельвина;  $c$  – скорость света;  $c_2 = hc/k$  – вторая радиационная постоянная. Величина  $a$  в отличие от  $g^*$  имеет ясный физический смысл.

Константу скорости принято выражать в виде:

$$K_d = AT^n e^{-E_d/KT}. \quad (18)$$

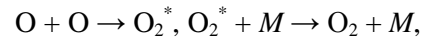
Для описания химической кинетики наиболее часто используется хорошо себя зарекомендовавшая модель полной энергии столкновения (Total Collision Energy, TCE), в которой вероятность бинарной реакции

$$P = \frac{A\Gamma(\xi/2 + 5/2 - \omega_{ij})}{\Gamma(n + \xi/2 + 3/2) \pi (d_{ij}^{ref})^2 k^n} \sqrt{\frac{m_{ij}}{8\pi}} (kT_{ref})^{1/2 - \omega_{ij}} \times \quad (19)$$

$$\times (1 - E_d/E_C)^{n + \xi/2 + 1/2} E_C^{\omega_{ij} + n - 1} \theta(E_C - E_d).$$

Если столкновение привело к диссоциации в соответствии с вероятностью  $P$ , то производится столкновение молекулы с частицей по обычным правилам с перераспределением энергии в соответствии с методом Ларсена и Боргнакке. При этом из полной энергии столкновения вычитается (или прибавляется к ней) энергия реакции. После столкновения проводится процедура разделения молекулы на два атома (в случае диссоциации) или изменения сортов сталкивающихся частиц (в случае обменной реакции).

Рекомбинация моделируется двумя последовательными бинарными столкновениями:



где  $O_2^*$  – возбуждённая молекула;  $M$  – третья частица.

После того как становится известно, что третья частица имеет сорт  $M$ , вероятность рекомбинации определяется выражением

$$P = \frac{A n_M \Gamma(5/2 - \omega)}{\Gamma(n + 3/2) \pi d_{ref}^2 k^n} \sqrt{\frac{m}{16\pi}} (kT_{ref})^{1/2 - \omega} E_C^{\omega + n - 1}, \quad (20)$$

где  $\omega$  соответствует столкновению двух атомов;  $m$  – масса атома;  $K_r = AT^n$  – вид константы скорости рекомбинации.



При столкновении с поверхностью частица взаимодействует с кристаллической решёткой поверхности. В некоторых работах этот процесс исследован более детально, однако на практике применяются две упрощённые модели с зеркальным и диффузным законами отражения. Вводится коэффициент аккомодации  $\alpha_w$ , такой, что с вероятностью равной  $\alpha_w$  частица рассеивается поверхностью диффузно, а с вероятностью равной  $1 - \alpha_w$  отражается зеркально. При зеркальном отражении меняется только знак нормальной к поверхности компоненты скорости частицы относительно поверхности. Новое значение скорости определяется как:

$$\begin{aligned} c'_x &= 2U - c_x; \\ c'_y &= c_y; \\ c'_z &= c_z, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $c_x$  – нормальная к стенке компонента скорости;  $c_y, c_z$  – две касательные компоненты.

При диффузном отражении частица «забывает» свою предысторию, а функция распределения этих частиц приобретает температуру поверхности. Функцию распределения нормальной компоненты скорости частиц при диффузном отражении легко получить исходя из условия равенства потоков на стенку и от стенки в равновесном состоянии. Можно показать, что она имеет вид:

$$f(c_x) = \frac{c_x}{\left( U \sqrt{\frac{2\pi k T_w}{m}} + \frac{k T_w}{m} \right)} \exp\left( -\frac{m(c_x - U)^2}{2k T_w} \right); \quad (22)$$

$$f(c_y) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k T_w}} \exp\left( -\frac{m(c_y - V)^2}{2k T_w} \right); \quad (23)$$

$$f(c_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k T_w}} \exp\left( -\frac{m(c_z - W)^2}{2k T_w} \right),$$

где  $T_w$  – температура стенки;  $m$  – масса молекул;  $U, V, W$  – компоненты скорости стенки;  $U$  – нормальная компонента. «Касательным» компонентам скорости соответствует максвелловская функция распределения.

И соответственно новые значения скорости определяются как:

$$\begin{aligned} c_y &= V + \Omega_m \sqrt{-\ln(\gamma_1)} \sin(2\pi\gamma_2); \\ c_z &= W + \Omega_m \sqrt{-\ln(\gamma_3)} \sin(2\pi\gamma_4), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Omega_m = \sqrt{\frac{2kT_w}{m}}.$$

В том случае, когда  $U = 0$ , скорость  $c_x$  моделируется так:

$$c_x = \Omega_m \sqrt{-\ln(\gamma)}, \quad \Omega_m = \sqrt{\frac{2kT_w}{m}}, \quad (25)$$

где  $\gamma$  – равномерно распределённая величина в интервале (0, 1).

Указанные модели являются частями комплексной математической модели физических процессов (цифрового двойника) при полёте низкоорбитального КА и могут входить в состав проектов модельно-ориентированного системного проектирования технических объектов [8].

Самым удобным тестом для программы расчёта СМВ является обтекание сферы свободномолекулярным потоком, когда столкновения молекул между собой отсутствуют. Если температура набегающего потока  $T_\infty \rightarrow 0$  коэффициент сопротивления  $C_x$  и число Стэнтона  $St$  равны:

$$C_x \rightarrow 2, \quad St = \frac{q}{\rho_\infty U_\infty^3} \rightarrow \frac{1}{4}, \quad (26)$$

где  $q = \frac{2\pi}{4\pi R^2} \oint q(r, \theta) r^2 dr \sin\theta d\theta$  – средний тепловой поток от налетающих на поверхность сферы молекул. Из соображений симметрии  $C_y = C_z = 0$ .

### Литература

1. ГОСТ Р 57700.37-2021. Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения : национальный стандарт Российской Федерации : издание официальное : утвержден и введен в действие Приказом федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 16 сентября 2021 г. № 979-ст : введен впервые : дата введения 2022-01-01 / разработан ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ». – Москва : ФГБУ «РСТ», 2021. – 10 [1] с.

2. ГОСТ 16504-81. Система государственных испытаний продукции. Испытания и контроль качества продукции. Основные термины и определения : межгосударственный стандарт : издание официальное : введен в действие Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 8 декабря 1981 г. № 5297 : взамен ГОСТ 16504-74 : дата введения 01.01.82 / разработан Госстандарт СССР. – Москва : Стандартинформ, 2011. – 22 [1] с.
3. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами / Л. В. Докучаев. – Москва : Машиностроение, 1987. – 232 с.
4. Анализ динамики упругого ЛА методом синтеза подконструкций / О. П. Клишев, А. В. Викуленков, С. Г. Медведев [и др.] // В сб. тр. НПО им. С.А. Лавочкина. – 1991. – Вып. 1. – С. 25–41.
5. Руководство по эксплуатации : Руководство пользователя пакета программ Логос 5.3.21 // ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» : [сайт]. – 2017. – [9] с. – URL : <http://www.logos.vniief.ru/materials/manual/>.
6. Бужинский В. А. Динамика и устойчивость движения ракет / В. А. Бужинский. – Королёв : ФГУП ЦНИИмаш, 2017. – 270с.
7. Ефименко Г. Г. Математическая модель движения космического аппарата с жидким топливом в условиях малых перегрузок / Г. Г. Ефименко // Международная научно-техническая конференция «Современные проблемы машиноведения». – Гомель, 2000. – Т. 1. – С. 185–188.
8. Совмещение архитектурных и математических моделей в системном инжиниринге технических систем / А. С. Алешенко, О. П. Клишев, В. В. Кондратьев [и др.] // Космонавтика и ракетостроение. – 2021. – Вып. 5 (122). – С. 116–127.

Поступила в редакцию 20.06.2023

*Геннадий Григорьевич Ефименко, кандидат технических наук, главный специалист, т. 8 (495) 513-57-01, e-mail: EfimenkoGG@tsniimash.ru.*

*Сергей Васильевич Залетаев, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, т. 8 (495) 513-42-12, e-mail: ZaletaevSV@tsniimash.ru.*

*Никита Валерьевич Скоморохов, заместитель начальника отдела, т. 8 (495) 513-56-27, e-mail: SkomorokhovNV@tsniimash.ru.*

*Андрей Олегович Меняйло, инженер 2 категории, т. 8 (495) 513-57-39, e-mail: MenyayloAO@tsniimash.ru.*

*Олег Павлович Клишев, доктор технических наук, профессор, начальник отдела, т. 8 (495) 513-49-78, e-mail: KlishevOP@tsniimash.ru.*

*Андрей Леонидович Кусов, кандидат физико-математических наук, начальник лаборатории, т. 8 (495) 513-55-83, e-mail: KusovAL@tsniimash.ru. (АО «ЦНИИмаш»).*

*Артем Александрович Рассказов, кандидат экономических наук, заместитель директора Департамента по цифровизации, т. 8 (495) 631-90-09 (доб. 2298), e-mail: Rasskazov.AA@roskosmos.ru. (Государственная корпорация по космической деятельности «Роскосмос»).*

*Николай Александрович Румынский, начальник отдела, т. 8 (495) 513-54-57, e-mail: RumynskiyNA@tsniimash.ru. (АО «ЦНИИмаш»).*

## COMPLEX MATHEMATICAL MODEL OF PHYSICAL PROCESSES DURING SPACECRAFT FLIGHT IN LOW ORBIT

**G. G. Efimenko, S. V. Zaletaev, N. V. Skomorokhov,  
A. O. Menyaylo, O. P. Klishev, A. L. Kusov,  
A. A. Rasskazov, N. A. Rumynsky**

*The mathematical models of physical processes during the flight of a low-orbit spacecraft are considered. A mathematical model of the perturbed motion of an elastic spacecraft is given, taking into account the program rotations of deformable elements of its design, external and control influences. An approximate mathematical model of the movement of liquid fuel in tanks under conditions of weightlessness and low overloads is presented. The analytical dependences of the bond reaction forces during the interaction of liquid fuel with the tank walls are determined. The calculation of the dynamic characteristics of elastic vibrations of structural elements is carried out by the finite element method, on the basis of which the coefficients of elastic connections between elastic vibrations of structural elements of the product and its linear and angular motion as a solid are calculated. To estimate this decrease, a mathematical model has been developed for calculating the forces of molecular action on a spacecraft in a free molecular flow. These models are components of a complex mathematical model of physical processes during the flight of a low-orbit spacecraft and can be used as part of model-oriented system design projects for technical facilities.*

**Keywords:** mathematical models, dynamics, elastic vibrations, hydrodynamics of liquid fuel, molecular dynamics in rarefied gases.

### References

1. GOST R 57700.37-2021. Computer models and simulation. Digital twins of products. General provisions : national standard of the Russian Federation : official edition : approved and brought into force by the Order of the Federal Agency for Technical Regulation and Metrology No. 979-сr of September 16, 2021 : introduced for the first time : effective date 01.01.2022 / prepared by the All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics. – Moscow : FSBI ‘Russian Standardization Institute’, 2021. – 10 [1] p.
2. GOST 16504-81. The state system of testing products. Product test and quality inspection. General terms and definitions : interstate standard : official edition : brought into force by the Order of the State Committee on Standards of the USSR No. 5297 of December 8, 1981 : introduced instead of GOST 16504-74 : effective date 01.01.82 / prepared by Gosstandart of the USSR. – Moscow : Standartinform, 2011. – 22 [1] p.
3. Dokuchayev L. V. Nonlinear dynamics of aircraft with deformable elements / L. V. Dokuchayev. – Moscow : Mashinostroyeniye, 1987. – 232 p.
4. Analysis of dynamics of an elastic aircraft using the method of synthesis of substructures / O. P. Klishev, A. V. Vikulenkov, S. G. Medvedev [et al.] // In the collected works of Lavochkin Research and Production Association. – 1991. – Issue 1. – P. 25–41.
5. Operating manual : User manual for Logos 5.3.21 software package // FSBI ‘Russian Standardization Institute’ : [website]. – 2017. – [9] p. – URL : <http://www.logos.vniief.ru/materials/manual/>
6. Buzhinsky V. A. Dynamics and stability of motion of rockets / V. A. Buzhinsky. – Korolyov : FSUE TSNIIMASH, 2017. – 270 p.
7. Yefimenko G. G. Mathematical model of motion of a spacecraft with liquid fuel under conditions of low overloads / G. G. Yefimenko // International Scientific and Technical Conference ‘Current problems of mechanical engineering’. – Gomel, 2000. – V. 1. – P. 185–188.
8. Combination of architectural and mathematical models in system engineering / A. S. Aleshchenko, O. P. Klishev, V. V. Kondratyev [et al.] // Cosmonautics and rocket engineering. – 2021. – Issue 5 (122). – P. 116–127.

**Gennadiy Grigorievich Efimenko**, candidate of technical sciences, chief specialist,  
tel.: 8 (495) 513-57-01, e-mail: EfimenkoGG@tsniimash.ru.

**Sergey Vasilievich Zaletaev**, candidate of technical sciences, senior researcher,  
tel.: 8 (495) 513-42-12, e-mail: ZaletaevSV@tsniimash.ru.

**Nikita Valerievich Skomorokhov**, deputy head of department,  
tel.: 8 (495) 513-56-27, e-mail: SkomorokhovNV@tsniimash.ru.

**Andrey Olegovich Menyaylo**, 2nd category engineer, tel.: 8 (495) 513-57-39, e-mail: MenyayloAO@tsniimash.ru.

**Oleg Pavlovich Klishev**, doctor of technical sciences, professor, head of department,  
tel.: 8 (495) 513-49-78, e-mail: KlishevOP@tsniimash.ru.

**Andrey Leonidovich Kusov**, candidate of physics and mathematics, head of laboratory,  
tel.: 8 (495) 513-55-83, e-mail: KusovAL@tsniimash.ru.

(JC «TSNIIMASH»).

**Artem Aleksandrovich Rasskazov**, candidate of economic sciences, deputy director  
Department for Digitalization, tel.: 8 (495) 631-90-09 (add. 2298), e-mail: Rasskazov.AA@roscosmos.ru.  
(The State Space Corporation «Roscosmos»).

**Nikolay Aleksandrovich Rumynskiy**, head of department, tel.: 8 (495) 513-54-57,  
e-mail: RumynskiyNA@tsniimash.ru.

(JC «TSNIIMASH»).