

## МЕТОДОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ БАЗИСАХ

Б.В. Костров  
(Рязанский государственный  
радиотехнический университет)

*Рассматривается проблема применения функций Виленкина – Крестенсона для обработки аэрокосмических изображений. Приводится ряд теорем, на которых базируется методология применения преобразований, построенных на системе данных функций. Методологические аспекты иллюстрируются примерами обработки аэрокосмических изображений.*

**Ключевые слова:** ортогональные функции, функции Виленкина – Крестенсона, диадная свёртка, функция Радемахера, фильтрация аэрокосмических изображений.

Изображение можно рассматривать как дискретный сигнал, определённый на конечном интервале  $N \times N$  своих отсчётов координат на плоскости. Наибольшие успехи в области обработки аэрокосмических изображений достигнуты в настоящее время при построении алгоритмов в пространстве этих отсчётов, заданных в пространственных координатах [1]. При этом пространственно-частотные свойства изображений не учитываются. Сведения об использовании классического гармонического анализа для обработки изображений можно найти в [2]. Однако вычислительная сложность реализации преобразования Фурье сдерживает широкое применение данных методов в практике обработки аэрокосмических снимков. Для решения задач спектрального анализа в общем случае могут быть использованы любые системы, содержащие необходимое количество ортогональных функций. Выбор системы функций будет определяться требованиями удобства вычислений и, в конечном счёте, трудоёмкостью алгоритмов реализации искомого преобразования. Применение альтернативных систем базисных функций требует методологического осмысления возможности их применения для решения поставленных задач.

В данной статье проводится теоретическое и методологическое обобщение известных и доказанных автором ранее положений, позволяющих расширить методологию ортогональных преобразований. Основная новизна работы заключается, таким образом, в создании теоретической и методологической основы применения систем функций Виленкина – Крестенсона (ВКФ), в том числе минимально возможной формы их построения в виде функций Уолша, для обработки аэрокосмических изображений.

Ключевым вопросом методологии применения систем ВКФ для обработки изображений является

определение порядка системы счисления для построения базисных функций.

Наиболее общий подход к решению данной проблемы может быть найден при анализе систем ВКФ. Любая система ВКФ может быть представлена в виде  $N \times N$  квадратной ортогональной матрицы размером. При этом ВКФ будут периодическими функциями с рациональным периодом, заданным в некоторой  $m$ -ичной системе счисления, интервалом существования которых будет являться интервал  $N=m^n$ , где  $m$  и  $n$  – целые числа.

В общем случае ВКФ являются комплексными функциями, определёнными выражением [3]:

$$VKF(p, x) = \prod_{i=0}^{n-1} w^{<p_i x_i>}, \quad (1)$$

где  $w = \exp[j(2\pi/m)]$ ,  $p_i$  и  $x_i$  – значения коэффициентов в  $m$ -ичном представлении чисел  $p$  и  $x$ .

При  $m=2$ ,  $w = \exp[j\pi] = -1$  и ВКФ совпадает с функциями Уолша:

$$VKF(p, x) = (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} <p_i x_i>}$$

В другом крайнем случае при  $n=1$  значения  $p$  и  $x$  не превосходят единственного разряда десятичного представления этих чисел и ВКФ переходят в дискретные экспоненциальные функции – def:

$$\text{def}(p, x) = e^{j[(2\pi/N)]px}$$

С другой стороны, ВКФ могут быть представлены через функции Радемахера – комплексные функции, заданные на том же интервале  $N=m^n$ :

$$R_i(x) = e^{j(2\pi/m)x_i},$$

где индекс  $i$  обозначает порядок функции Радемахера.

Тогда в соответствии с (1), ВКФ могут быть записаны как

$$VKF(p, x) = \prod_{i=0}^{n-1} [R_i(x)]^{<P_i>}.$$

Для случая  $m=2$  функции Радемахера могут быть заданы следующим образом:

$$r_i(x) = (-1)^{<x_i>},$$

где  $<x_i>$  – есть  $i$ -й разряд двоичного представления переменной  $x$ .

При таком задании все функции Радемахера являются действительными и нечётными на интервале  $N$ . Составленная из них система не является полной. Дополнение её до полной приводит к системе функций Уолша:

$$wal(w, x) = \prod_{i=1}^n [r_i(x)]^{<w_i>},$$

где  $<w_i>$  значение  $i$ -го разряда номера функции Радемахера, представленного в коде Грея;  $i=1, 2, 3, \dots, n$ .

Если в номере функции Радемахера присутствует только одна единица, то функция Уолша совпадает с функцией Радемахера с соответствующим номером.

Таким образом, на интервале определения  $N=2^n$  систему функций Уолша можно разделить на  $n$  групп. При этом функция нулевого порядка не учитывается. Если эти группы обозначить номерами  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , то каждая группа начинается с функции Радемахера  $r_{n+1-k}$  и каждая группа включает в себя  $2^{n-k}$  функций с учётом самой функции Радемахера. Таким образом, система функций Радемахера создаёт своеобразный «каркас», на котором строится система Уолша, при этом неизбежно возникает идея использования данного факта при спектральном анализе сигналов.

Для построения методологических основ применения данной системы можно выделить следующие свойства её функций:

1. Они являются действительными функциями на интервале определения  $N=2^n$ .

2. Так как функции системы принимают значения только +1 и -1, то основными операциями при использовании разложения по системе Уолша являются операции сложения и вычитания.

3. Система функций Уолша является ортогональной на интервале определения  $N$ , а матрица Адамара, построенная по функциям Уолша, является симметрической.

4. Поскольку матрица Адамара имеет размерность  $N \times N$ , то в неё входят  $N$  ортогональных функций и, следовательно, её нельзя дополнить ни одной новой ортогональной функцией. Это значит, что такая система функций является полной и может быть использована для построения унитарных преобразований негармонического спектрального анализа.

Вычислительная сложность такого преобразования будет минимальна, так как все операции заменяются на операции сложения действительных чисел в отличие от дискретных экспоненциальных функций, где все числа комплексные [3].

Методология применения такого преобразования базируется на ряде теорем, отличающихся от соответствующих теорем классического спектрального анализа.

Следствия, вытекающие из этих теорем, позволяют строить эффективные алгоритмы фильтрации и корреляционного анализа аэрокосмических изображений.

### 1. Теорема о диадной свёртке

Если  $\{X_n\}$  и  $\{Y_n\}$  – цифровые последовательности, заданные на интервале  $N$ , то последовательность свёртки (корреляции)  $\{Z_s\}$

$$Z_s = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n Y_{n \oplus s}$$

будет определяться следующим образом:

$$Z_s = \sum_{u=0}^{N-1} W_u^s (C_u^X \times C_u^Y),$$

где  $W_u^s$  – функция Уолша порядка  $s$ ;  $C_u^X$  – спектральные коэффициенты последовательности  $\{X_n\}$  и  $C_u^Y$  – спектральные коэффициенты последовательности  $\{Y_n\}$ .

Теорема позволяет понять механизм формирования элементов сигнала после фильтрации в спектральном пространстве [4]. Доказательство данной теоремы для непрерывного случая можно найти, например, в [5].

### 2. Теорема о вещественно-диадной свёртке (ВДС)

Если  $\{X_n\}$  и  $\{Y_n\}$  – цифровые последовательности, заданные на интервале  $N$ , то последовательность свёртки (корреляции)  $\{Z_s\}$

$$Z_s = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n Y_{n-s}$$

может быть найдена как

$$Z_s = \sum_{u=0}^{N-1} C_u^X (C_u^Y)_s,$$

где  $C_u^X$  – спектральные коэффициенты последовательности  $\{X_n\}$  и  $(C_u^Y)_s$  – спектральные коэффициенты, вычисляемые при сдвиге последовательности  $\{Y_n\}$ .

Теорема позволяет строить сложные спектральные фильтры и эффективные алгоритмы корреляционного анализа. Доказательство теоремы и методы построения корреляционной функции двух изображений можно найти в [6]. Выявление физических принципов функционирования ВДС приводится в [7, 8].

### 3. Теорема об инвариантности прореженного базиса

Если  $\{V_n\}$  – цифровая последовательность, полученная из последовательности  $\{X_n\}$  в результате диадного сдвига на  $l$ , т. е.  $V_n = X_{n \oplus l}$ , и

$$C^v = \frac{1}{N} \mathbf{H}_w \mathbf{V} \text{ и } C^x = \frac{1}{N} \mathbf{H}_w^0 \mathbf{X},$$

где  $C^v$  – коэффициенты спектра Уолша последовательности  $\{V_n\}$ ,  $C^x$  – коэффициенты секвентного спектра последовательности  $\{X_n\}$ ,  $\mathbf{H}_w^0$  – прореженная произвольным образом и  $\mathbf{H}_w$  – исходная матрица Адамара соответственно, то

$$(C^v)^2 = (C^x)^2.$$

Теорема позволяет производить некоторые виды фильтрации в процессе получения спектрального представления, что несвойственно другим си-

стемам базисных функции. Доказательство теоремы можно найти в [9].

### 4. Теорема об ограничении нетригонометрического спектра

Если  $n$  – порядок системы функций Радемахера и  $k$  – номер группы функций в системе Уолша, а ограничение спектра осуществляется на уровне функций Радемахера с номером  $n+1-k$ , то во вновь образованном изображении яркость полученных элементов  $b_{ij}^{[N_s]}$  будет равна:

$$b_{ij}^{[N_s]} = \frac{1}{S^2} \sum_{g=1}^s \sum_{p=1}^s b_{gp},$$

где  $s=2^{k-1}$ ,  $N_s=N/S$ ,  $i, j=1 \dots \bar{N}_s$ ,

зависимость  $i(s)$ ;  $j(s)$ ;  $g(i)$ ;  $p(j)$  здесь не показана, чтобы не загромождать написание формулы.

Интуитивное использование данного свойства позволило построить двухуровневый алгоритм совмещения изображений, обладающий в десятки раз меньшими вычислительными затратами, чем алгоритмы, описанные в [6]. Пример реализации такого подхода описан в [10], а использование следствий из этой теоремы для построения системы текстурных признаков изображений в [11].

### 5. Теорема об энергетической полноте квазидвумерного спектрального представления

Если  $b$  – матрица цифрового изображения размером  $M \times N$  и  $C$  – коэффициенты его квазидвумерного спектрального представления, то справедливо равенство:

$$\frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} b_{ij}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} C_{iv}^2. \quad (2)$$

Выражение (2) является равенством Парсевалья для квазидвумерного представления двумерных сигналов. Его доказательство не требует особого пояснения, так как оно вытекает из известных свойств спектрального анализа. Использование данной теоремы позволяет в два раза сократить вычислительные затраты и получить некоторые другие преимущества при устранении отдельных видов искажений [6, 12].

### 6. Теорема о постоянной составляющей спектра

Если предположить, что  $b(x, 0)=0$  конкретное значение элемента изображения в каждой строке, то нет необходимости передавать постоянную составляющую изображения через канал связи – её можно всегда восстановить по формуле:

$$B_0 = - \sum_{v=1}^{N_2} B(x, v-1) (-1)^{\sum_{i=1}^n \langle (v-1)_i y_i \rangle}.$$

Передаваемый спектр в этом случае не имеет постоянной составляющей. На рис. 1 приводится результат использования теоремы 1 для фильтрации изображения с синхронными мультипликативными помехами [13]. Фильтрация проводится посредством применения диагонального фильтра в квазидвумерном спектральном пространстве Уолша. Восстановление изображения осуществляется по формуле:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_w \mathbf{H}_{uu} \mathbf{C},$$

где  $\mathbf{B}$  – матрица восстановленного изображения;  $\mathbf{C}$  – матрица спектральных коэффициентов;  $\mathbf{H}_w$  – матрица Уолша – Адамара;  $\mathbf{H}_{uu}$  – матрица, строки которой составлены из коэффициентов диагональных фильтров строк  $h_{uu}$ :

$$h_{uu} = \frac{(\sum G)_{uu} - (\sum \eta)_{uu}}{(\sum G)_{uu}},$$

где  $(\sum G)_{uu}$  и  $(\sum \eta)_{uu}$  – ковариационные матрицы строк изображения с помехой и самой помехи соответственно, вычисленные в спектральном пространстве.

Использование теорем 2, 3, 4 в алгоритмах совмещения изображений иллюстрируется рис. 2 [6, 8, 9]. Корреляционная функция совмещения строится на основе теоремы о ВДС по формуле:

$$K_{ВД}(p, g) = \frac{1}{ML} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} [H_w^0 F_{ЭИ}(m, l)] \times [H_w^0 F_{ТИ}(m+p, l+g)],$$

где  $p$  и  $g$  – параметры сдвига;  $M$  и  $L$  – размеры совмещаемых фрагментов;  $F_{ЭИ}(m, l)$  и  $F_{ТИ}(m+p, l+g)$  – спектры эталонного и текущего фрагментов;  $H_w^0$  – элементы прореженной матрицы Уолша – Адамара.

Применение преобразования Уолша позволяет на порядок ускорить работу алгоритма совмещения по сравнению с преобразованием Фурье [3]. Использование в процессе преобразования двухэтапных алгоритмов, построенных с применением теоремы об ограничении нетригонометрического спектра позволяет уменьшить время совмещения на 70 – 80% [10].

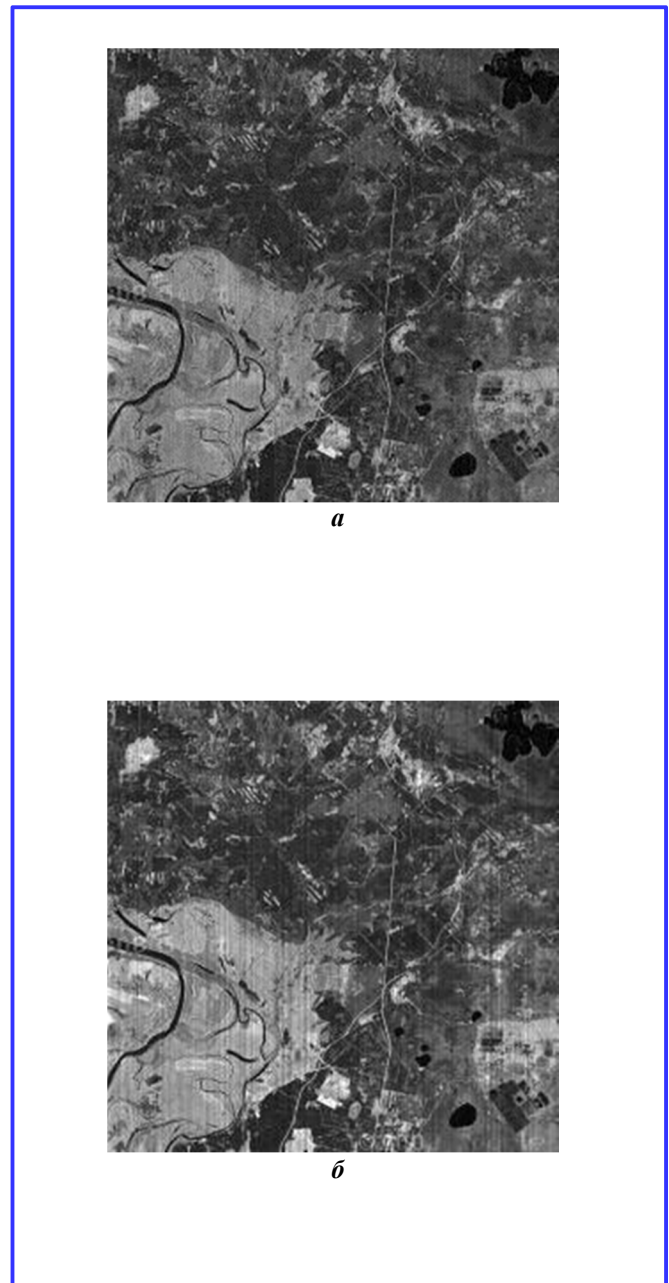


Рис. 1. Пример фильтрации изображения с мультипликативной синхронной помехой: *а* – исходное изображение с СКО=7,4184; ПОСШ=30,4; УИК=0,87; *б* – результат фильтрации СКО=4,77; ПОСШ=36,4; УИК=0,98

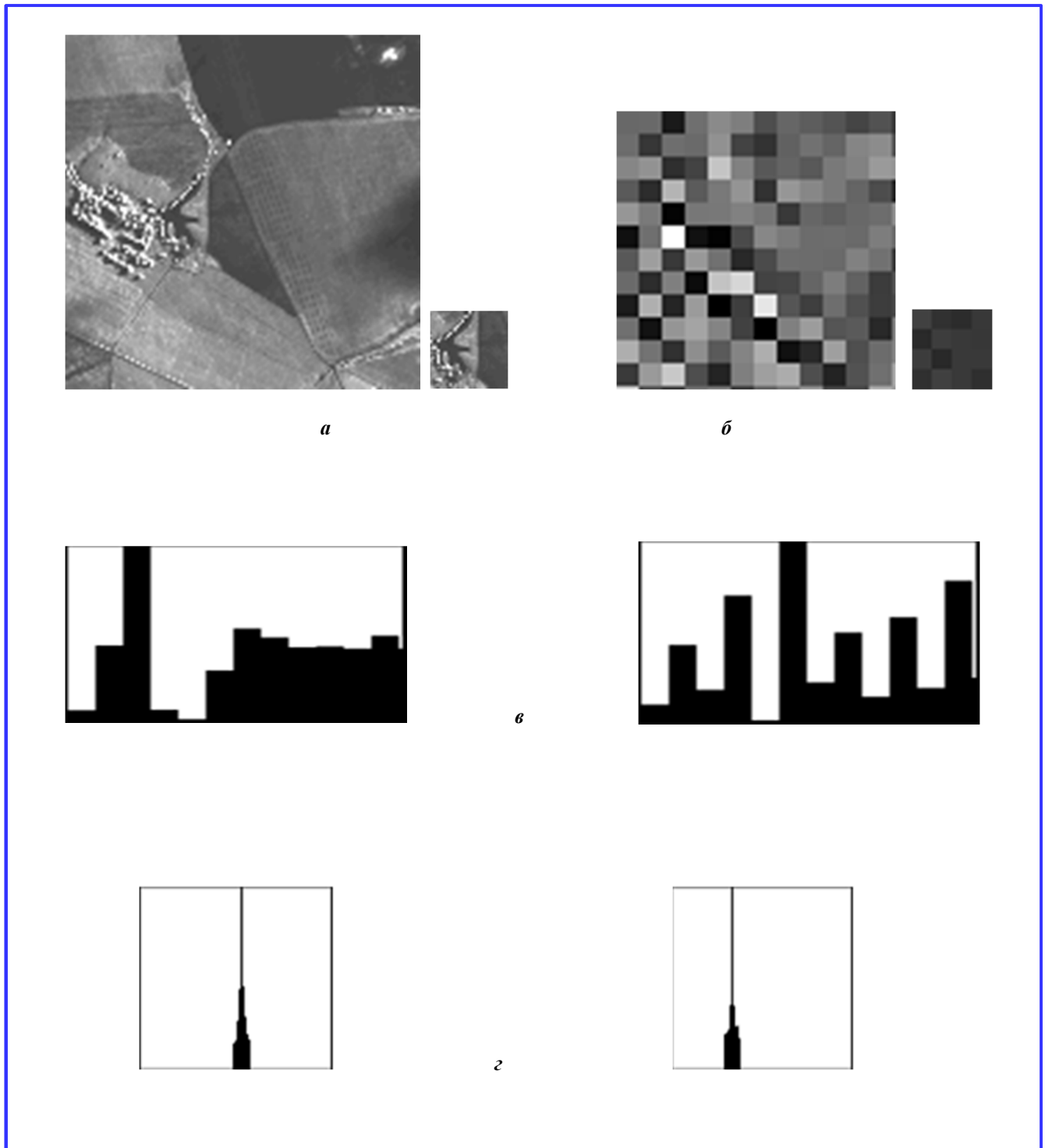


Рис. 2. Процесс совмещения изображений: *a* – исходные и эталонные изображения; *б* – изображения первого этапа (теорема 4); *в* – корреляционная функция по горизонтали и вертикали, полученная на первом этапе; *z* – корреляционная функция совмещения по горизонтали и вертикали, полученная на втором этапе.

Удельная вычислительная сложность 3 тыс. оп./пиксель



Рис. 3. Совмещения 9 отдельных кадров КА «Канопус-В»

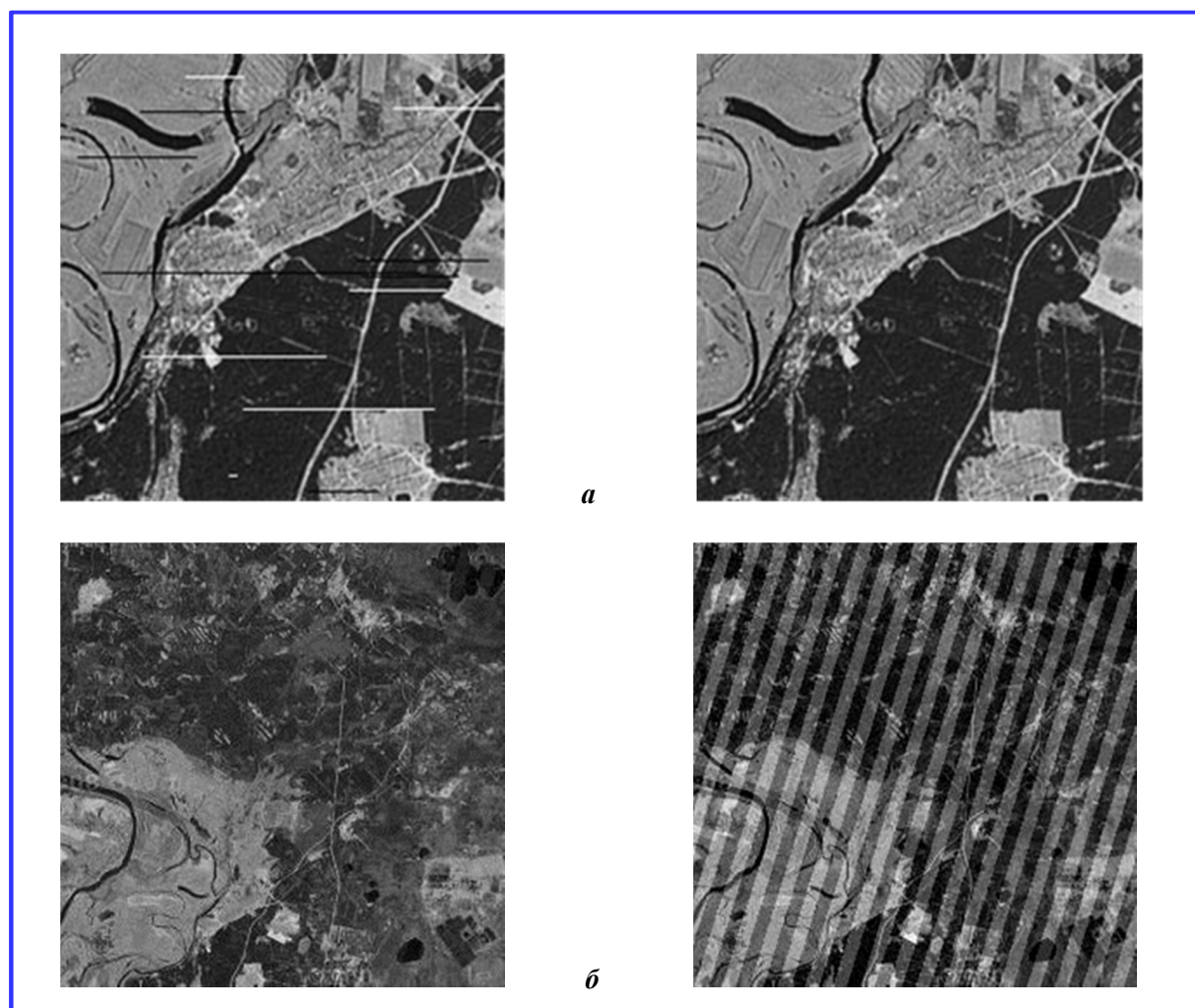


Рис. 4. Квазидвумерная фильтрация изображений с групповыми помехами: *а* – достигнутые показатели качества: СКО=1,33; ПОСШ=47,35; УИК=0,97; *б* – квазидвумерная фильтрация изображений с несинхронными помехами, достигнутые показатели качества: СКО=1,87; ПОСШ=43,67; УИК=0,99

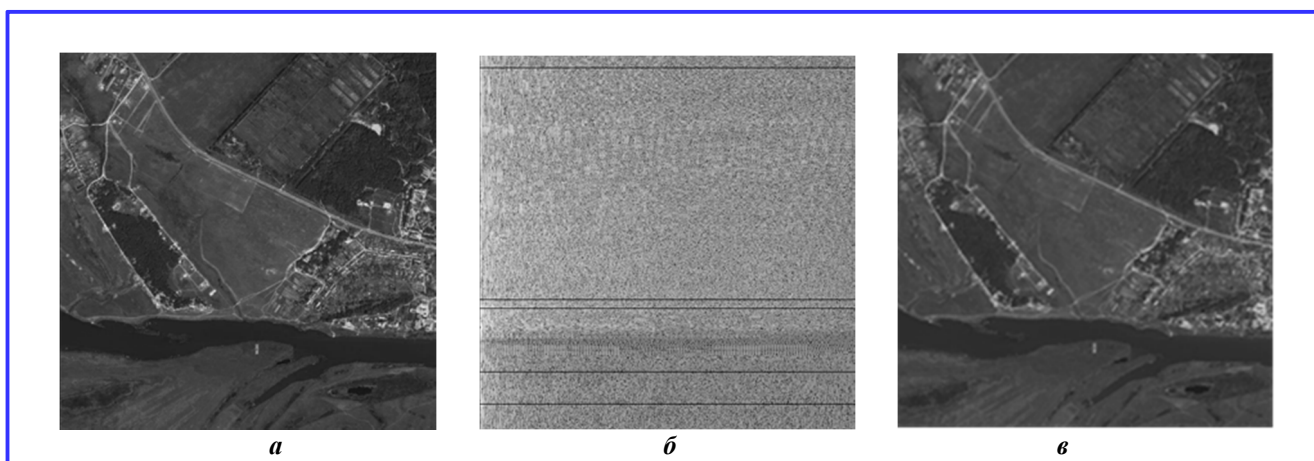


Рис. 5. Устранение групповых помех, возникающих в процессе передачи спектра изображения без постоянной составляющей: *а* – исходное изображение; *б* – спектр с потерянными строками; *в* – восстановленное изображение (СКО=0,93)

Результат применения описанной технологии для совмещения отдельных кадров КА «Канопус-В» представлен на рис. 3.

Использование квазидвумерного представления спектров (теорема 5) для построения алгоритмов фильтрации изображений с групповыми [12] и несинхронными помехами приведено на рис. 4.

Процесс устранения групповых помех в процессе передачи спектра изображения без постоянной составляющей (теорема 6) показан на рис. 5.

Данный метод позволяет передавать изображения в условиях наличия групповых помех (СКО от идеального изображения не превышает одной градации яркости) при снижении энергетической нагрузки на канал до 25 %. При уменьшении требований к точности восстановления изображений (СКО не более двух) нагрузка на канал может быть уменьшена до 37% и более.

### Литература

1. Злобин В. К., Еремеев В. В. Обработка аэрокосмических изображений / В. К. Злобин, В. В. Еремеев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 288 с.
2. Гонзалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонзалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2006. – 1072 с.
3. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах / А. М. Трахтман, В. А. Трахтман. – М. : Сов. радио, 1975. – 208 с.
4. Костров Б. В., Костров В. В., Саблина В. А. Алгоритм восстановления изображений с периодическими низкочастотными искажениями / Б. В. Костров и др. // Радиотехника. – 2009. – № 11. – С. 92 – 95.
5. Проектирование специализированных информационно-вычислительных систем / под ред. Ю. М. Смирнова. – М. : Высшая школа, 1984. – 359 с.
6. Злобин В. К., Колесенков А. Н., Костров Б. В. Корреляционно-экстремальные методы совмещения аэрокосмических изображений / В. К. Злобин и др. // Вестник Рязанского государственного радиоуниверситета. – 2011. – № 3 (Вып. 37). – С. 12 - 17.
7. Костров Б. В. Корреляционно-экстремальный метод обнаружения цифровых сигналов / Б. В. Костров // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 2. – С. 46 – 51.
8. Колесенков А. Н., Костров Б. В., Саблина В. А. Применение вещественно-диадной свёртки для идентификации аэрокосмических изображений / А. Н. Колесенков и др. // В мире научных открытий. – 2011. – № 1 (13). – С. 122 – 127. – (Серия Математика. Механика. Информатика).
9. Колесенков А. Н., Костров Б. В. Метод прореживания базисных функций в корреляционно-экстремальных алгоритмах / А. Н. Колесенков и др. // Вопросы радиоэлектроники. – 2010. – Вып. 1. – С. 176 – 184. – (Сер. ОТ.).
10. Колесенков А. Н., Костров Б. В. Технология повышения производительности корреляционных алгоритмов совмещения для информационной системы космического мониторинга / А. Н. Колесенков, Б. В. Костров // Научное творчество XXI века : материалы IV Всерос. НПК с международным участием. Приложение к журналу «В мире научных открытий». – Красноярск, 2011. – Вып. 2. – С. 80 – 82.
11. Костров Б. В., Саблина В. А. Построение векторов секвентных текстурных признаков / Б. В. Костров, В. А. Саблина // Научное творчество XXI века: материалы IV Всерос. научно-практ. конференции с международным участием. Приложение к журналу

- «В мире научных открытий». – Красноярск, 2011. – Вып. 2. – С. 139 – 141.
12. Костров Б. В., Некрасова О. С., Свирина А. Г. Метод квазидвумерной фильтрации групповых помех / Б. В. Костров и др. // Методы и средства обработки и хранения информации: межвуз. сб. научн. тр. – Рязань: РГРТУ, 2010. – С. 144 – 147.
13. Костров Б. В., Саблина В. А. Адаптивная фильтрация изображений со структурными искажениями / Б. В. Костров и др. // Цифровая обработка сигналов. – 2008. – № 4. – С. 49 – 53.

*Поступила в редакцию 18.06.2014*

**Борис Васильевич Костров**, *д-р техн. наук,*  
*профессор кафедры электронных вычислительных машин,*  
*т. 8 (4912) 46-03-50, e-mail kostrov.b.v@evm.rsreu.ru*