

УДК 621.396.6

ОБЗОР МЕТОДОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ, ИХ ОПТИМИЗАЦИЯ И УСКОРЕНИЕ

Е. В. Комиссарова, Г. А. Гальченков

Большинство методов электродинамического моделирования антенных систем вызывает трудности выбора оптимального подхода для решений прикладных задач с точки зрения необходимости обеспечения точности и минимизации времени расчета. В статье приведен обзор различных численных методов решения электродинамических задач, успешно применяемых во многих пакетах прикладных программ, а также современные подходы к их ускорению и оптимизации.
Ключевые слова: электродинамика, численные методы, оптимизация.

Введение

Решение уравнений Максвелла с граничными условиями или условиями на бесконечности лежат в основе анализа любой электродинамической задачи. Среди методов моделирования можно выделить три основных подхода: численный, асимптотический и аналитический. Аналитические методы часто отличаются наглядностью, простотой в реализации и экономичностью при расчетах, однако их применение, как правило, ограничено. Численные методы, в свою очередь, предлагают возможность решения сложных абстрактных задач, анализа и моделирования процессов в широкой полосе частот, но требуют существенных временных и вычислительных затрат. Некоторого баланса позволяют достичь асимптотические методы за счет применения определенных упрощений в постановке задачи и ценой снижения точности получаемого решения.

Для пользователей программных пакетов, то есть инженеров, непосредственно разрабатывающих конечное устройство, в условиях с временными и финансовыми рамками обычно наиболее важно получить решение с приемлемой точностью с минимальными временными затратами, чем получить строгое решение, но за пределами установленных ограничений. Применение систем автоматизированного проектирования, основанных на численных методах, позволяет [1] сократить цикл разработка-изготовление, проводить моделирование со сложным законом изменения параметров объекта и, таким образом, сократить затраты на натурное моделирование. По этой причине, а также в результате бурного развития цифровых технологий, численные и асимптотические методы стали неотъемлемой частью повседневной жизни разработчика.

Численные методы решения задач электродинамики

К некоторым широкоизвестным [2] численным методам электродинамики можно отнести: метод моментов (ММ), метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных разностей (МКР), а также различ-

ные их специализации и модификации (метод моментов – физической оптики (ММФО)). Эти методы позволяют рассчитывать сложные системы связанных объектов и реализуются во многих пакетах автоматизированного проектирования: CST Studio Suit, Altair FEKO, Matlab Antenna ToolBox, COMSOL Multiphysics и др.

Формулировка решаемой задачи

Задача, решаемая указанными методами, является стандартной [3] граничной задачей в заданной области V с условиями на границе S . И определяется [4] уравнением вида:

$$L(f) = g, \quad (1)$$

где L – оператор преобразования (обычно дифференциальный); f – распределение поля в пространстве или отклик на входное воздействие; g – распределение источников.

Саму задачу обычно формулируют так: по известным g и L найти распределение f в заданной области V (пример внутренней задачи электродинамики). Если его решение существует, то оно представляется как:

$$f = L^{-1}(g). \quad (2)$$

Сложность состоит в том, что оператор L обычно оказывается таким, что существует множество решений. В этом случае требуется определить граничные условия вида:

$$g = g(x)|_x = [0, 1], \quad (3)$$

$$f(0) = f(1) = 0, \quad (4)$$

которые позволяют вернуться к единственности решения. Уравнения (3), (4) соответствуют граничным условиям для одномерной задачи.

Определив таким образом область и условия существования единственного решения, можно переходить к различным методам его получения.

Метод моментов

Основная идея ММ состоит в аппроксимации распределения поля f некоторым конечным рядом [4].

$$f = \sum_n \alpha_n f_n, \tag{5}$$

где f_n – базисные функции, обеспечивающие точность представления; α – весовые коэффициенты, определяющие вклад соответствующей функции.

Тогда, если оператор L является линейным оператором, подставляя полученный ряд в исходное уравнение и вынося знак суммы из под оператора, получим:

$$\sum_n \alpha_n L(f_n) = g. \tag{6}$$

Дискретизация непрерывного исходного уравнения, и переход к матричной форме позволяет найти матрицу коэффициентов α_n , являющуюся по сути решением. Для этого необходимо определить набор тестовых w_m функций и скалярное произведение $\langle w_m, f \rangle, \langle w_m, g \rangle$.

В результате получим:

$$\sum_n \alpha_n \langle w_m, L(f_n) \rangle = \langle w_m, g \rangle, \tag{7}$$

где $m = 1, 2, 3...$

Или в матричном виде:

$$[I_{mm}][\alpha_n] = [g_m], \tag{8}$$

тогда, если матрица I не является вырожденной, существует ее обращение и соответственно решение в виде коэффициентов α_n :

$$[\alpha_n][I_{mm}^{-1}] = [g_m]. \tag{9}$$

Искомое же распределение поля будет представлено выражением (5).

Выбор тестовых функций w_m и базисных функций f_n определяет как сложность решения, так и получаемую точность, очевидно что, если поле f не может быть представлено в виде конечного ряда, то решение будет получено с некоторым приближением. Аналогичное правило действует и для аппроксимации источников. Так как требование необходимой точности обычно приводит к высокой сложности решения (большой размерности матрицы I_{mm}) ведутся постоянные попытки увеличения точности при дискретизации.

Известна, например, работа [5]. Авторы предложили применение базисных функций высшего порядка – неравномерных рациональных Б-сплайнов (НРБС) в областях Безье для дискретизации произвольных объектов. В качестве основного достоинства такого подхода они рассматривают значительное уменьшение размерности решения (рис. 1).

Кроме того, отмечается, что НРБС-функции получили широкое распространение в среде компьютерного моделирования и фактически являются стандартом обмена информацией об объектах. Форма, описанная с их помощью, отличается высокой точностью построения и отсутствием неоднородностей, что критически важно для решения электродинамических задач.

Не менее интересным способом сокращения времени расчета является параллелизация вычислений с использованием графических ускорителей [6]. В работе рассматривается задача нахождения эффективной площади рассеяния (ЭПР) произвольных трехмерных объектов, с использованием базисных функций Рао – Уилтон – Глиссон и метода Галеркина (функции дискретизации источника и поля совпадают). Используя представление данных в виде «поток» источника и поля (рис. 2), содержащих информацию о дискретизации поверхности и аппроксимации поля соответственно, авторам удалось утилизировать мощности графического ускорителя, предназначенные для работы с матрицами. При этом был также использован алгоритм разделения матрицы и потоков на группы меньшего размера, что позволило избавиться от ограничения размеров обрабатываемых текстур. В результате полученный выигрыш во времени на указанном оборудовании достигал 20 раз.

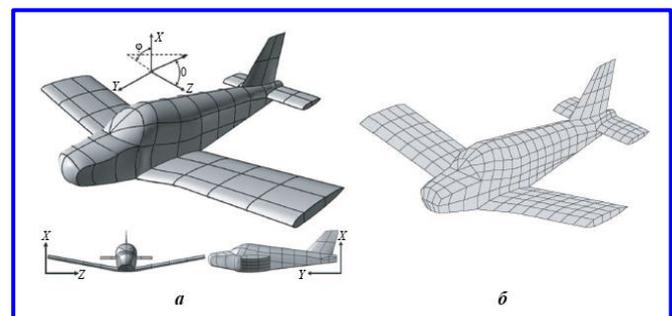


Рис. 1. Модель самолета дискретизованная: а – 176 областями Безье и б – 550 билинейными квадрилатералами

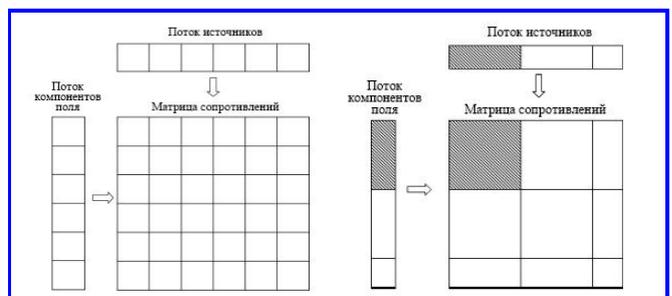


Рис. 2. Визуализация алгоритмов заполнения и разделения матрицы

Другим путем ускорения решения является гибридизация метода. Так в работах [7, 8] рассматривается ММФО и его эффективная итеративная модификация. Выигрыш во времени и памяти возникает в результате использования приближения. Поверхность объекта разбивается на область, решаемую ММ и область использующую приближение физической оптики (рис. 3).

При этом коэффициенты определяющие поверхностные токи в области физической оптики находятся не в результате решения набора линейных уравнений, а определяются непосредственно из самого приближения, что в случае с электрически большими объектами позволяет значительно снизить вычислительные затраты (в первой работе затраченное центральным процессором (ЦП) время с 311 до 44 с).

Метод конечных элементов

В отличие от ММ решение в МКЭ представляется не суммой ряда базисных функций, определенных на всей области решения, а набором кусочно-непрерывных функций, аппроксимирующих искомое распределение непрерывной величины в этой области. В простейшем одномерном случае это может быть линейная аппроксимация (рис. 4).

Распределение некоторой непрерывной величины (рис. 5), определенной в области L , представляется набором линейных отрезков (элементов) (рис. 6, а).

Увеличение числа точек в элементе меняет аппроксимацию величины. Кусочная функция, определяющая величину в границах элемента, представляется полиномом, степень которого растет пропорционально числу узлов (рис. 6, б).

Для двух узлов кусочная функция в элементе:

$$\varphi = \left(\frac{X_j - x}{L}\right)\Phi_i + \left(\frac{x - X_j}{L}\right)\Phi_j. \quad (10)$$

Для r узлов:

$$\varphi^{(e)} = [N]\{\Phi\} = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & N_j^{(e)} & N_k^{(e)} & \dots & N_r^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \\ \dots \\ \Phi_r \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

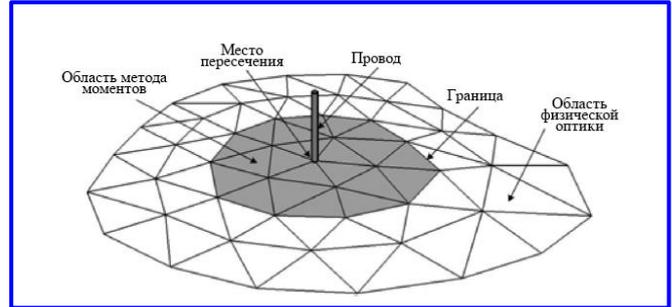


Рис. 3. Разделение на области при использовании гибридного метода

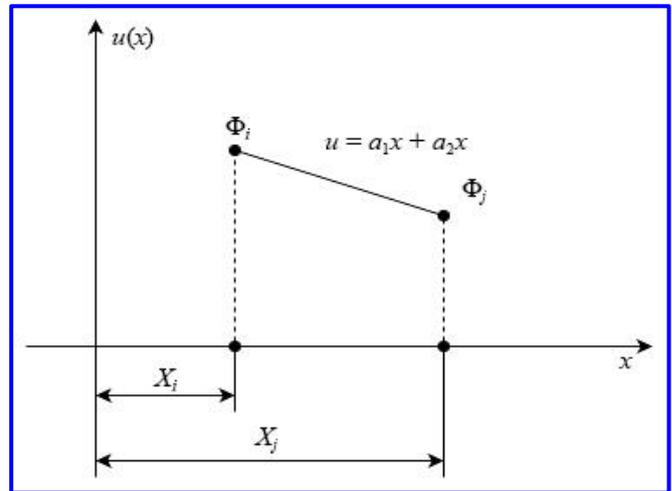


Рис. 4. Разбиение области анализа для одномерного случая

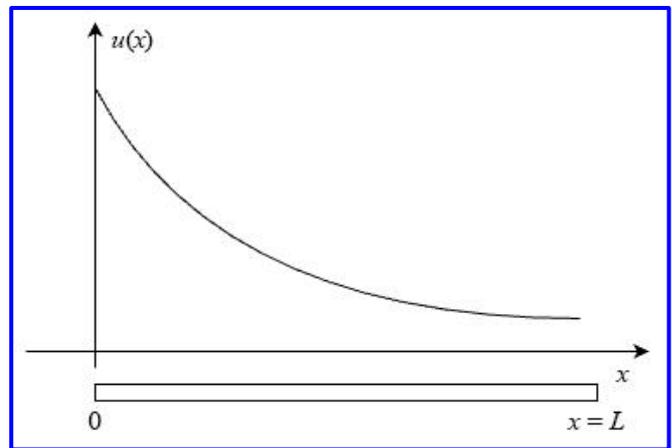


Рис. 5. Непрерывная величина u , распределенная по области L

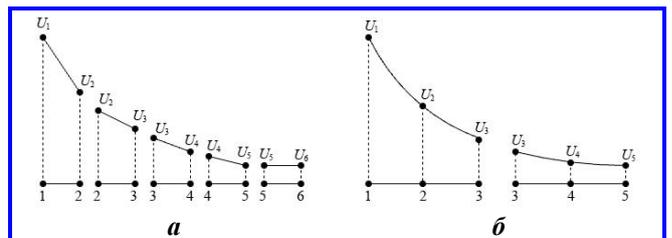


Рис. 6. Разбиение области анализа на элементы: а – двумя узловыми точками; б – тремя узловыми точками

Тогда модель, аппроксимирующая величину (пример для области из пяти элементов с тремя узлами в каждом):

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_2^{(1)}\Phi_2 + N_3^{(1)}\Phi_3 + N_1^{(1)}\Phi_1 \\ \varphi^{(2)} &= N_3^{(2)}\Phi_3 + N_3^{(2)}\Phi_3 + N_4^{(2)}\Phi_1 \\ \varphi^{(3)} &= N_5^{(3)}\Phi_5 + N_3^{(3)}\Phi_3 + N_4^{(3)}\Phi_4 \\ \varphi^{(4)} &= N_6^{(4)}\Phi_6 + N_3^{(4)}\Phi_3 + N_5^{(4)}\Phi_5 \\ \varphi^{(5)} &= N_1^{(5)}\Phi_1 + N_3^{(5)}\Phi_3 + N_6^{(5)}\Phi_6 \end{aligned} \quad (12)$$

Подставив эту модель в уравнения Максвелла, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), после решения которой станут известны значения Φ поля в узловых точках, а значит и распределение самого поля согласно модели выше.

Так же как и в ММ, достижение необходимой точности на высоких частотах требует увеличения точек разбиения пространства, что в итоге приводит к большому набору уравнений и, как следствие, высоким вычислительным затратам. Одним из очевидных путей ускорения является параллелизация вычислений.

Так в работе [9] авторами рассматриваются узкие места, связанные с выполнением МКЭ на одном и множестве графических ускорителей, кроме того, полученное решение сравнивается с распараллеливанием на множестве центральных процессоров. Среди возможных ограничений выделяются: громоздкие структуры данных, представляющих геометрию, требующуюся для вычислений, несогласованный доступ к ней при выполнении параллельных вычислений, гонки данных при сборе элементных матриц.

Предложенный авторами подход проверен на нескольких моделях. Так рассчитано распределение поля двумерной рупорной антенны на частоте 300, 500 и 800 МГц (рис. 7).

При этом выполнено сравнение затраченного времени при расчете на одноядерном ЦП и одном графическом процессоре (ГП). Сокращение времени растет с увеличением частоты и превышает 13 раз на частоте 800 МГц.

Другой вид аппаратного ускорения рассматривается в [10]. Авторы предлагают разделить выполнение метода. Генерацию сетки дискретизации и сбор элементной матрицы выполнять на ЦП, а решение СЛАУ как наиболее вычислительно сложный процесс перенести на программируемую логическую интегральную схему (ПЛИС). При этом для решения СЛАУ был выбран итеративный метод Якоби. Для проверки решения использовалась электростатическая граничная задача из [11] по нахождению распределения электрического потенциала внутри бесконечно длинной прямоугольной коробки с металлическими стенками (рис. 8).

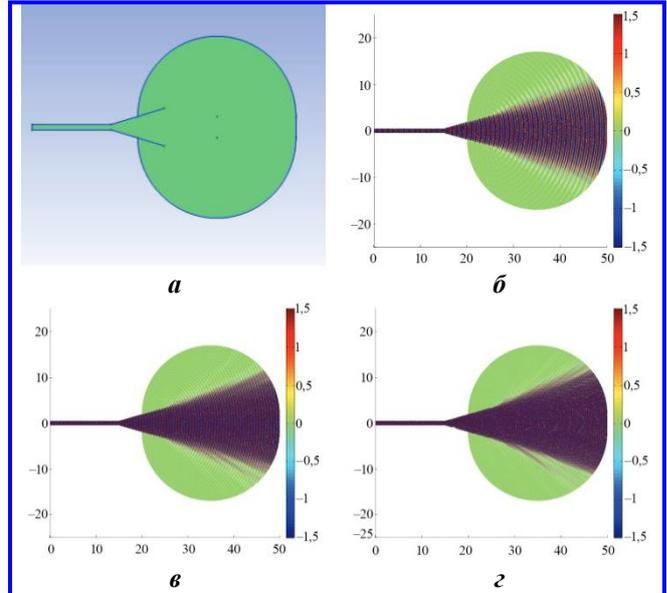


Рис. 7. а – рупорная антенна и область анализа; распределение поля на 300 МГц (б), 500 МГц (в) и 800 МГц (z)

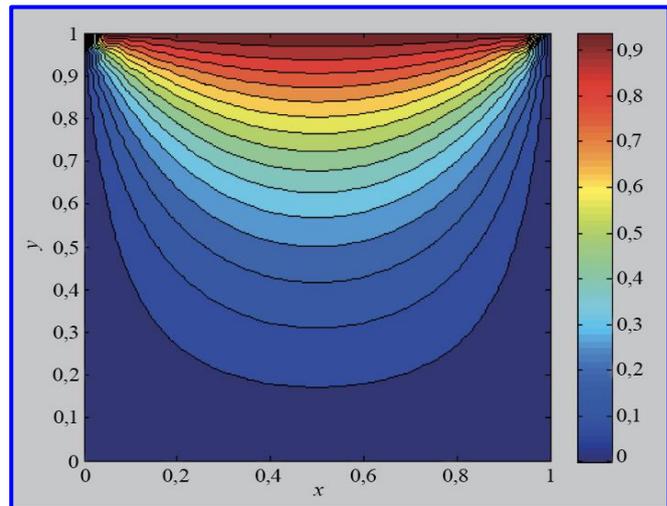


Рис. 8. Решение граничной задачи методом конечных элементов

Суммарное достигнутое ускорение превысило 4 раза. Следует, однако, отметить, что ПЛИС на сегодняшний день дороги и требуют специальных навыков программирования, в то время как для графических ускорителей и многопроцессорных вычислений уже доступны коммерческие и открытые наборы библиотек, существенно упрощающие их применение в решении вычислительных задач.

Алгоритмическое ускорение рассмотрено в работе [12]. Авторами представлено решение МКЭ, основанное на так называемых иерархических матрицах. Такое представление позволяет проводить более эффективные вычисления. В частности, обращение матрицы в этом случае имеет сложность

$O(\text{Mlog}^2N)$. Общая же вычислительная сложность оценивается как $O(k^2\text{Mlog}^2N)$. Сравнение предложенного решения с другим наиболее продвинутом на момент публикации методом, который основан на использовании разреженных матриц, показало преимущество метода с иерархическими матрицами.

Метод конечных разностей во временной области

Технику решения уравнений Максвелла в пространственно-временной форме предложил Кейн С. Йи [13]. Однако распространение метод получил только с ростом вычислительных мощностей.

Суть метода состоит в замене частных производных конечно-разностным выражением. При этом можно выделить следующие этапы решения:

- построение дискретизационной сетки (рис. 9);
- построение конечно-разностных уравнений, описывающих функциональные связи между узлами сетки;
- решение системы конечно-разностных уравнений с n -неизвестными каким-либо численным методом.

Так для одномерного случая и центрально-разностной аппроксимации:

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{f(\varphi_0 + \Delta\varphi/2) + f(\varphi_0 - \Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi}. \quad (13)$$

Получим [14]:

$$\frac{E_y^{n+1}(i) - E_y^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{H_z^{n+1/2}(i+1/2) - H_z^{n+1/2}(i-1/2)}{\Delta x}. \quad (14)$$

Особенность таких систем – большая размерность. В зависимости от требуемой точности она может достигать нескольких тысяч неизвестных.

Поэтому интересно рассмотреть работу [15]. Авторы представили МКР с различными улучшениями для ускорения процесса исследования метаматериалов (рис. 10).

Согласно статье, было разработано открытое программное обеспечение, поддерживающее такие оптимизации как: неравномерная сетка дискретизации, метод Total – Field/Scattered – Field (TFSF), метод вспомогательного поля для дисперсионных материалов, оконное преобразование Фурье, а также параллельный расчет на графических ускорителях и компьютерных кластерах, который позволил получить дополнительный выигрыш в скорости решения до 480%.

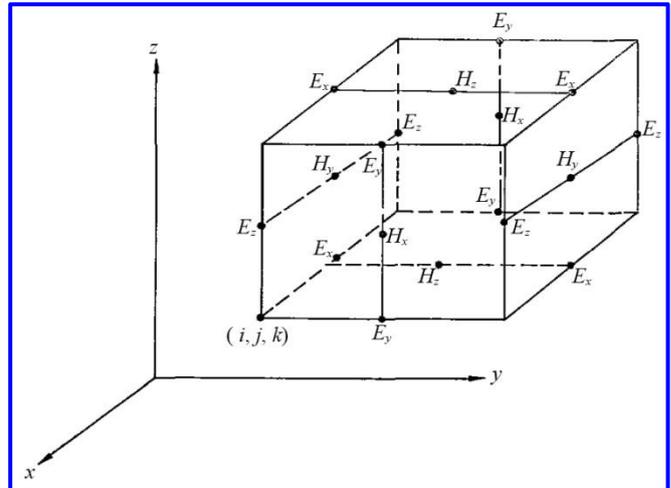


Рис. 9. Расположение различных компонент поля. E – компоненты в серединах грани и H – компоненты в центрах поверхностей

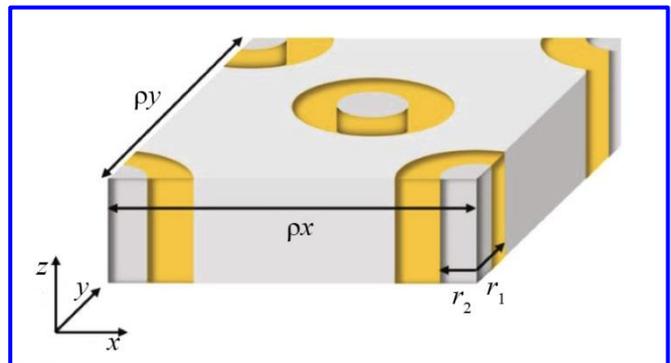


Рис. 10. Метаматериал с отрицательным индексом преломления

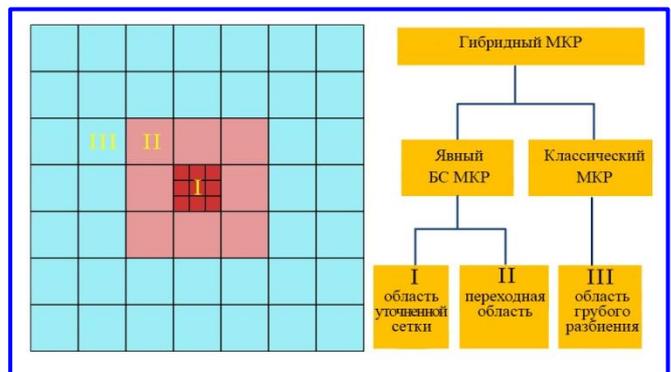


Рис. 11. Классификация вычислительных областей гибридного метода конечных разностей

Эффективный гибридный метод был представлен в [16]. Авторам удалось совместить простоту классического МКР с отсутствием ограничения Куранта – Фридриха – Леви (КФЛ) в безусловно стабильных (БС) МКР. Особенность заключается в разбиении пространства на несколько областей (рис. 11). Расчет I и II области осуществляется с помощью явного БС МКР, что поз-

воляет преодолеть условие КФЛ. Для оставшейся III области используется традиционный МКР. Таким образом, размерность системной матрицы БС МКР снижается, собственные числа требуется вычислять только для областей I и II.

В результате при моделировании процесса излучения время, затраченное традиционным и гибридным МКР, составило 218,85 с и 11,5 с соответственно. Интересную комбинацию применения нейронных сетей и МКР представили авторы работы [17]. Обучение нейросети с долгой кратковременной памятью на примерах задач, решенных МКР, позволило значительно сократить время моделирования, особенно в трехмерном случае. При этом заявленная ошибка составила 0,64% и 0,35% для двумерного и трехмерного случаев.

Заключение

Наличие множества численных методов расчета задач электродинамики позволяет сделать оптимальный выбор для конкретной прикладной задачи. Однако все рассмотренные методы испытывают трудности при анализе электрически больших объектов на высоких частотах, в связи с чем идут постоянные поиски способов оптимизации и ускорения. Наибольший выигрыш в скорости удается получить за счет распараллеливания вычислений, что требует некоторых модификаций методов для согласованного доступа к памяти и устранения возможной гонки данных. Существенные преимущества удается также получить путем гибридизации методов, позволяя применять аппроксимации в тех областях задачи, где это возможно, и снижая тем самым общую сложность.

Литература

1. Обзор систем автоматизированного проектирования / Е. В. Овчинникова, П. А. Шмачилин, С. Г. Кондратьева [и др.] // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. – 2024. – Т. 198. – № 1. – С. 39–46.
2. Обзор численных методов решения задач электродинамики / Е. В. Овчинникова, П. А. Шмачилин, С. Г. Кондратьева [и др.] // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. – 2024. – Т. 198. – № 1. – С. 17–25.
3. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн: учеб. пособие для радио-техн. спец. вузов / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Наука, 1989. – 543 с.
4. Harrington R. F. Field computation by moment methods / R. F. Harrington, J. L. Harrington. – New York : Oxford University Press, Inc., 1996. – 240 p.
5. Liu Z.-L. Analysis of electromagnetic scattering with high-

er-order moment method and NURBS model / Z.-L. Liu, J. Yang // Progress In Electromagnetics Research. – 2009. – Vol. 96. – P. 83–100. – DOI: 10.2528/PIER09071704.

6. Peng S. Acceleration of the method of moments calculations by using graphics processing units / S. Peng, Z. Nie // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2008. – Vol. 56. – № 7. – P. 2130–2133. – DOI: 10.1109/TAP.2008.924768.
7. Jakobus U. A hybrid physical optics/method of moments numerical technique: theory, investigation and application / U. Jakobus, F. J. C. Meyer // Proceedings of IEEE. AFRI-CON'96. – 1996. – Vol. 1. – P. 282–287. – DOI: 10.1109/AFRCON.1996.563123.
8. Liu Z.-L. Efficient iterative method of moments – physical optics hybrid technique for electrically large objects / Z.-L. Liu, C.-F. Wang // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2012. – Vol. 60. – № 7. – P. 3520–3525. – DOI: 10.1109/TAP.2012.2196963.
9. Meng H.-T. GPU accelerated finite-element computation for electromagnetic analysis / H.-T. Meng, B.-L. Nie, S. Wong et al. // IEEE Antennas and Propagation Magazine. – 2014. – Vol. 56. – № 2. – P. 39–62. – DOI: 10.1109/MAP.2014.6837065.
10. Accelerating the finite element method using FPGA for electromagnetic field computation / J. Zhang, M. Zhang, H. He et al. // 2015 IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER) (Shenyang, China). – IEEE, 2015. – P. 1763–1768. – DOI: 10.1109/CYBER.2015.7288213.
11. Polycarpou A. C. Introduction to the finite element method in electromagnetics / A. C. Polycarpou // Springer Nature, 2022. – 126 p.
12. Liu H. H-Matrix-Based fast direct finite element solver for large-scale electromagnetic analysis / H. Liu, D. Jiao. – Purdue University: ECE Technical Reports, 2010. – 148 p.
13. Yee K. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media / K. Yee // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1966. – Vol. 14. – № 3. – P. 302–307. – DOI: 10.1109/TAP.1966.1138693.
14. Гринев А. Ю. Численные методы решения прикладных задач электродинамики: учеб. пособие / А. Ю. Гринев. – Москва: Радиотехника, 2012. – 336 с.
15. Seok M.-S. Electromagnetic metamaterial simulations using a GPU-accelerated FDTD method / M.-S. Seok, M.-G. Lee, S. Yoo // Journal-Korean Physical Society. – 2015. – Vol. 67. – № 12. – P. 2026–2032. – DOI: 10.3938/jkps.67.2026.
16. He X.-B. New hybrid FDTD algorithm for electromagnetic problem analysis / X.-B. He, B. Wei, K.-H. Fan et al. // Chinese Physics B. – 2019. – Vol. 28. – Issue 7. – Article id: 074102. – DOI: 10.1088/1674-1056/28/7/074102.
17. Wu F. An efficient time-domain electromagnetic algorithm based on LSTM neural network / F. Wu, M. Fan, W. Liu et al. // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2021. – Vol. 20. – № 7. – P. 1322–1326. – DOI: 10.1109/LAWP.2021.3079313.

Поступила в редакцию 26.04.2024

Елена Владимировна Комиссарова, кандидат технических наук, доцент кафедры РЛП, заместитель декана, т. 8 (499) 263-69-83, e-mail: komissarovaev@bmstu.ru.

*Григорий Александрович Гальченко, аспирант,
т. +7 (909) 957-71-24, e-mail: GregorGall50@gmail.com.
(Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана).*

REVIEW OF COMPUTATIONAL ELECTRODYNAMICS METHODS, THEIR OPTIMIZATION AND ACCELERATION

E. V. Komissarova, G. A. Galchenkov

A lot of methods of computational electrodynamics causes difficulties in choosing the optimal approach for solving applied problems with required accuracy and minimal computation time. The paper provides an overview of various numerical methods widely used in many computer aided design packages for solving electrodynamic problems and modern approaches to their acceleration and optimization.

Key words: computational electrodynamics, numerical methods, optimization.

References

1. Review of computer-aided design systems / E. V. Ovchinnikova, P. A. Shmachilin, S. G. Kondratieva [et al.] // Questions of electromechanics. Proceedings of VNIEM. – 2024. – Vol. 198. – No. 1. – P. 39–46.
2. Review of numerical methods for solving problems of electrodynamics / E. V. Ovchinnikova, P. A. Shmachilin, S. G. Kondratieva [et al.] // Questions of electromechanics. Proceedings of VNIEM. – 2024. – Vol. 198. – No. 1. – P. 17–25.
3. Nikolsky V. V. Electrodynamics and propagation of radio waves: textbook. a manual for radio technology. special edition / V. V. Nikolsky, T. I. Nikolskaya. – 3rd ed., revised. and additional – Moscow: Nauka, 1989. – 543 p.
4. Harrington R. F. Field computation by moment methods / R. F. Harrington, J. L. Harrington. – New York : Oxford University Press, Inc., 1996. – 240 p.
5. Liu Z.-L. Analysis of electromagnetic scattering with high-order moment method and NURBS model / Z.-L. Liu, J. Yang // Progress In Electromagnetics Research. – 2009. – Vol. 96. – P. 83–100. – DOI: 10.2528/PIER09071704.
6. Peng S. Acceleration of the method of calculating moments using graphics processors / S. Peng, Z. Ni // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2008. – Vol. 56. – No. 7. – P. 2130–2133. – DOI: 10.1109/TAP.2008.924768.
7. Jacobus U. Hybrid physical optics/The numerical method of moments: theory, research and application / W. Jacobus, F. J. K. Meyer // Proceedings of the IEEE. AFRI-CON'96. – 1996. – Volume 1. – pp. 282–287. – DOI: 10.1109/AFRCON.1996.563123.
8. Liu Z.-L. An effective iterative method of the hybrid technology «Moments – physical optics» for electrically large objects / Z.-L. Liu, K.-F. Wang // Proceedings of the IEEE on Antennas and Propagation. – 2012. – Vol. 60. – No. 7. – P. 3520–3525. – DOI: 10.1109/TAP.2012.2196963.
9. Meng H.-T. Finite element calculations accelerated on GPU for electromagnetic analysis / H.-T. Meng, B.-L. Ni, S. Wong et al. // IEEE Antennas and Propagation Magazine. – 2014. – Vol. 56. – No. 2. – P. 39–62. – DOI: 10.1109/MAP.2014.6837065.
10. Acceleration of the finite element method using FPGAs for calculating the electromagnetic field / J. Zhang, M. Zhang, H. He et al. // IEEE 2015 International Conference on Cyber Technologies in Automation, Control and Intelligent Systems (CYBER) (Shenyang, China). – IEEE, 2015. – P. 1763–1768. – DOI: 10.1109/CYBER.2015.7288213.
11. Polikarpou A. S. Introduction to the finite element method in electromagnetism / A. S. Polikarpou // Springer Nature, 2022. – 126 p.
12. Liu H. Fast matrix-based finite element solver for large-scale electromagnetic analysis / H. Liu, D. Jiao. – Purdue University: Technical Reports of the EEC, 2010. – 148 p.
13. Yi K. Numerical solution of initial boundary value problems using Maxwell's equations in isotropic media / K. Yi // Proceedings of the IEEE on antennas and propagation. – 1966. – Vol. 14. – No. 3. – P. 302–307. – DOI: 10.1109/TAP.1966.1138693.
14. Grinev A. Yu. Numerical methods for solving applied problems of electrodynamics: textbook. the manual / A. Y. Grieve. – Moscow: Radio Engineering, 2012. – 336 p.
15. Sok M.-S. Modeling of electromagnetic metamaterials using the FDTD method accelerated by a graphics processor / M.-S. Sok, M.-G. Lee, S. Yu // Journal of the Korean Physical Society. – 2015. – Vol. 67. – No. 12. – P. 2026–2032. – DOI: 10.3938/jkps.67.2026.
16. He X.-B. A new hybrid FDTD algorithm for the analysis of electromagnetic problems / H.-B. He, B. Wei, K.-H. Fan et al. // Chinese Physics B. – 2019. – Vol. 28. – Issue 7. – Article code: 074102. – DOI: 10.1088/1674-1056/28/7/074102.
17. Wu F. An effective electromagnetic algorithm in the time domain based on the LSTM neural network / F. Wu, M. Fan, W. Liu et al. // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2021. – Vol. 20. – No. 7. – P. 1322–1326. – DOI: 10.1109/LAWP.2021.3079313.

*Elena Vladimirovna Komissarova, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of RLI Department,
Associate Dean, t. 8 (499) 263-69-83, e-mail: komissarovaev@bmstu.ru.
Grigoriy Alexandrovich Galchenkov, Postgraduate student, t. +7 (909) 957-71-24, e-mail: GregorGall50@gmail.com.
(Bauman Moscow State Technical University).*