

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РОТОРА В СИСТЕМЕ МАГНИТНОГО ПОДВЕСА

А.С. Абдурагимов, В.П. Верещагин, А.В. Рогоза,  
И.Г. Руковицын, А.П. Сарычев  
(ОАО «Корпорация «ВНИИЭМ»)

*Рассмотрены вопросы идентификации динамических характеристик ротора в системе магнитного подвеса. Выполнен модальный анализ виртуального ротора для верификации его динамических характеристик, при помощи которых описывается математическая модель ротора системы управления магнитных подшипников.*

**Ключевые слова:** Магнитный подвес, динамические характеристики ротора, модальный анализ, собственные частоты и коэффициенты форм колебаний.

Вопросы динамики ротора достаточно полно рассмотрены и исследованы во многих литературных источниках, в том числе в [1]. На данный момент единого подхода в оценке полученных динамических характеристик роторов, особенно в машинах с системами магнитного подвеса (СМП), пока не разработано и ограничивается общими уравнениями и понятиями из аналитической механики. Для решения существующих практических задач по моделированию и синтезу системы управления магнитного подвеса ротора необходимо разработать способы идентификации расчётных динамических характеристик ротора. Данная работа призвана сформировать основные положения и подходы к идентификации динамических свойств ротора, цель которой заключается в уточнении влияния сил управления СМП в зависимости от мест расположения датчиков и электромагнитов.

В настоящее время, при определении динамических характеристик упругого ротора или валопровода агрегата в целом, рассматривается механическая модель поперечных колебаний ротора с применением метода конечных элементов (МКЭ). На основе этого метода путём численного решения поставленной задачи определяются собственные частоты и коэффициенты форм колебаний ротора. В результате строится математическая модель ротора, представляющая собой комбинацию отдельных осцилляторов, имитирующих различные формы колебаний, включая колебания, характерные для «жёсткого» и «гибкого» ротора. Применение МКЭ позволяет обеспечить достаточно высокую точность моделирования и учесть влияние различных факторов, в том числе влияние взаимного расположения элементов СМП [2]. Некоторые вопросы обобщённого подхода затрудняют физическое восприятие, и возникает трудность идентификации некоторых динамических свойств разработанных математических моделей. Например, в определении собственных частот и коэффициентов форм колебаний ротора возникают трудности с априорной оценкой влияния

отдельных присоединительных элементов конструкции ротора, жёсткости опор и т. п. В связи с этим могут потребоваться уточнения в оценке взаимовлияния динамических свойств и характерных параметров рассматриваемых моделей и в учёте влияния физических свойств самих устройств на их динамические характеристики. В качестве основных динамических параметров ротора обычно используют собственные частоты колебаний ротора  $\omega_i$  и коэффициенты собственных форм колебаний  $\psi_i$ , которые определяют степень воздействия со стороны системы магнитного подвеса на ротор и поступающую информацию о перемещениях ротора. Рассмотрим каждый из этих параметров в отдельности.

**Определение собственных частот колебаний ротора.** Общее уравнение свободных колебаний недемпфированного ротора имеет следующий вид [1]:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{q\} = 0, \quad (1)$$

где  $[M]$  – матрица масс ротора;  $[C]$  – матрица жёсткости ротора;  $\{q\}$  – вектор обобщённых перемещений ротора;  $\{\ddot{q}\}$  – вектор обобщённых ускорений узловых точек конструкции.

Вектор обобщённых перемещений ротора  $\{q\}$  для системы с большим числом степеней свободы (рис. 1) характеризуется вектором форм колебаний  $\{\psi\}$ . Изменение во времени перемещения динамической системы с некоторой частотой  $\omega_i$  происходит по гармоническому закону:

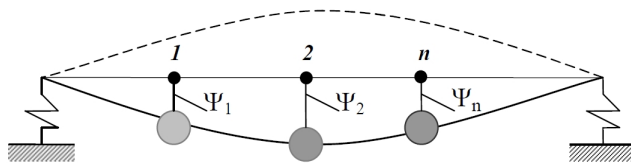


Рис. 1. Форма колебаний системы с большим числом степеней свободы

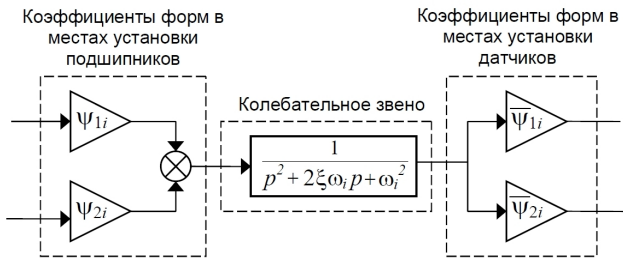


Рис. 2. Математическая модель осциллятора

$$\{q_i\} = \{\psi_i\} \sin(\omega_i t). \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение (1) получаем:

$$([C] - \omega_i^2 [M])\{\psi_i\} = 0. \quad (3)$$

Представленная система уравнений (3) является однородной и её решение, означающее наличие колебаний, возможно только в том случае, когда определитель системы уравнений (3) равен нулю:

$$Det([C] - \omega_i^2 [M]) = 0. \quad (4)$$

Раскрыв определитель (4), получим  $n$  линейных уравнений относительно  $\omega_i^2$ , решив которые найдём  $n$  собственных частот колебаний. Соответствующую каждой частоте  $\omega_i$  форму собственных колебаний  $\{\psi_i\}$  можно найти из уравнений (4), подставив в них значение найденной частоты  $\omega_i$ . Однако частота собственных колебаний обращает в ноль определитель системы уравнений (4), поэтому непосредственное решение этой системы невозможно. Определение вектора  $\{\psi_i\}$  собственных форм колебаний рассмотрим отдельно.

**Коэффициенты собственных форм колебаний.** Коэффициенты собственных форм  $\psi_i$  колебаний вычисляются в относительных единицах. Удобно использовать формы колебаний, ортонормированные по матрице масс системы. Условия ортогональности записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \{\psi_i\}^T [M] \{\psi_j\} &= 0, \quad j \neq i, \\ \{\psi_i\}^T [M] \{\psi_j\} &= 1, \quad j = i. \end{aligned} \quad (5)$$

В результате из уравнений (5) получаем аналитическую зависимость коэффициента для первой формы колебаний недеформируемого ротора, соответствующего осциллятору с одной сосредоточенной массой  $m$ :

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}. \quad (6)$$

При перемножении уравнения (3) на  $\{\psi_i\}^T$  получаем:

$$\{\psi_i\}^T [C] \{\psi_i\} = \{\psi_i\}^T \omega_i^2 [M] \{\psi_i\}. \quad (7)$$

С учётом (5) уравнение (7) можно записать в следующем виде:

$$\{\psi_i\}^T [C] \{\psi_i\} = \omega_i^2. \quad (8)$$

В результате из уравнения (8) по аналогии с уравнением (6) для осциллятора с одной степенью свободы  $\psi_i$  можно представить в следующем виде:

$$\Psi_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}},$$

где  $m_i$  – виртуальная масса ротора, соответствующая  $i$ -й форме колебаний.

Следовательно, коэффициенты формы можно идентифицировать значениями величин обратно пропорциональных корню квадратному из сосредоточенной массы, соответствующей данному току. Кроме того, при моделировании необходимо учитывать зависимость коэффициентов формы колебаний от мест взаимного расположения датчиков и электромагнитов по длине ротора и относительно узлов соответствующих форм колебаний.

**Модальный анализ ротора.** В предыдущей публикации [2] была представлена модель ротора, состоящая из отдельных осцилляторов, которые соединяются в блоки и образуют полную модель. Пересчёт сигналов, подаваемых на вход и снимаемых с выхода осциллятора, производится с учётом коэффициентов форм колебаний (рис. 2). При формировании модели ротора используются результаты модального анализа, из которого по порядку отбирается некоторое количество частот (мод) колебаний ротора, требующихся для исследования и оценки динамических качеств системы управления. Ротор, находящийся в магнитном поле подшипников, строго ограничен в местах расположения датчиков магнитных опор. Из этого следует, что для самого ротора основными динамическими величинами будут являться частоты самого ротора и коэффициенты форм колебаний в точках расположения датчиков и опор, координаты которых заведомо известны. При помощи МКЭ ротор в модальном анализе представлен как многомассовый объект с большим числом степеней свободы, что не вызывает вопросов по точности определения коэффициентов форм в тех узлах, координаты которых соответствуют местам центрального расположения подшипников и датчиков. Поскольку существуют

определённые трудности в восприятии данной модели, то могут возникнуть неточности в оценке результатов при проведении анализа и синтеза системы управления магнитным подвесом. Чтобы этого избежать была проведена идентификация динамических свойств ротора, которая заключалась в рассмотрении вопросов по характеру динамических параметров и их зависимости от инерционных и жёсткостных свойств ротора на примере модального анализа для виртуального ротора.

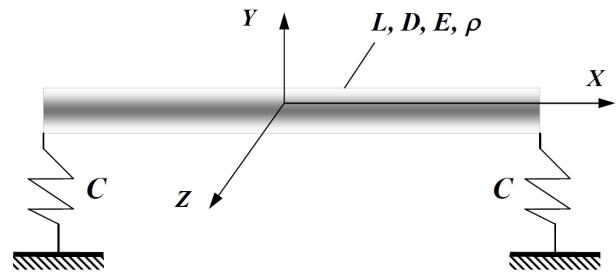


Рис. 3. Расчётная схема ротора

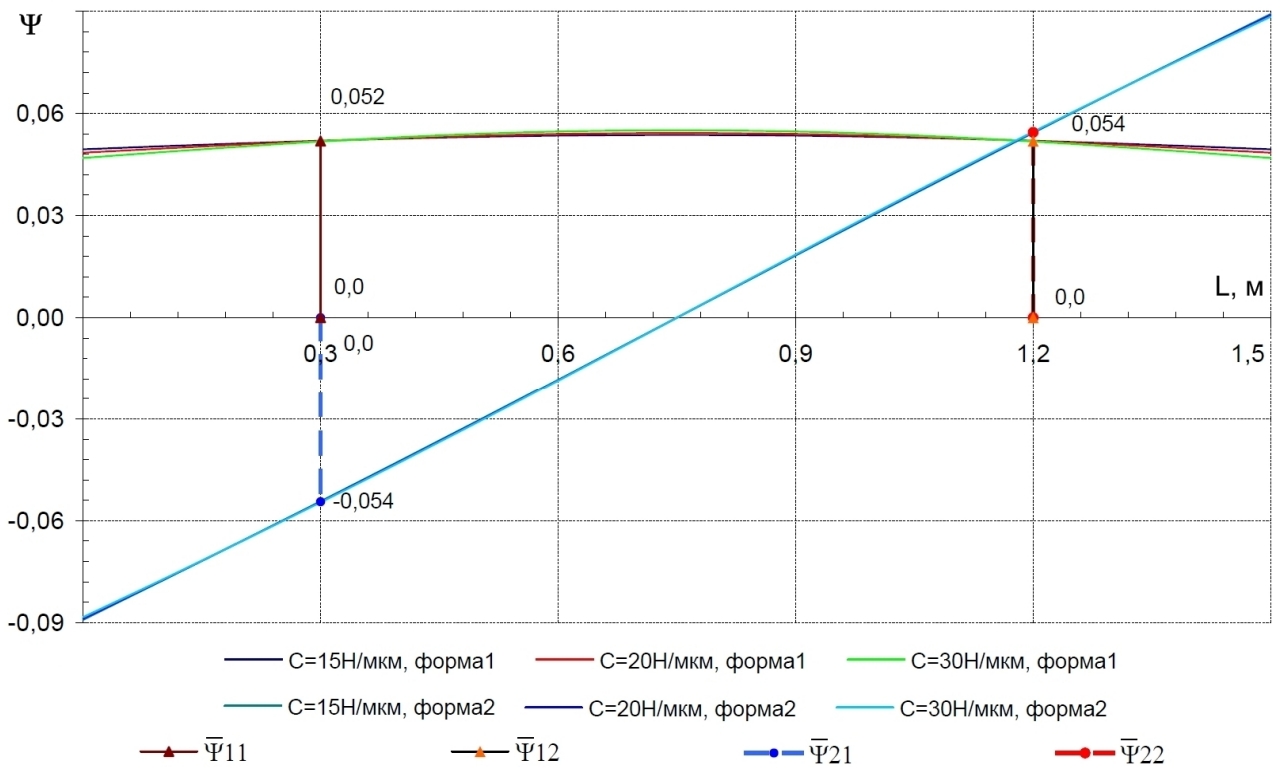


Рис. 4. Формы колебаний ротора как твёрдого тела

Для модального анализа относительно простого случая выберем виртуальный ротор, состоящий из однородного стержня круглого сечения диаметром  $D=0,2\text{ м}$  с распределённой массой  $\rho=7800\text{ кг/м}^3$  и установленный на двух упругих недемпфируемых опорах с жёсткостью  $C$  (рис. 3). Остальные параметры ротора: длина  $L=1,5\text{ м}$ , модуль упругости  $E=2,1 \cdot 10^{11}\text{ Па}$ .

На основании данных, содержащихся в предшествующей работе [2], получены аналитические зависимости собственных частот  $\omega$  и коэффициентов форм  $\psi$  (с учётом уравнения (8)) ротора как твёрдого тела, которые определяются в следующем виде:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2c}{m}}, \quad \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{m}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{6c}{m}}, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{3}{m}}.$$

Из этих соотношений видно, что коэффициенты форм для кососимметричных колебаний  $\psi_2$  примерно в 1,73 раза больше, чем для симметричных колебаний  $\psi_1$ . Аналогичные сравнительные результаты были получены при модальном анализе данного виртуального ротора с использованием МКЭ.

Значения коэффициентов форм  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , указанные в таблице, соответствуют расположению датчиков и электромагнитов по концам ротора.

## Собственные частоты и коэффициенты форм колебаний ротора

Способ решения	$f_1, \psi_1$ при $C, \text{Н/мкм}$			$f_2, \psi_2$ при $C, \text{Н/мкм}$		
	15	20	30	15	20	30
Численно (МКЭ)	44,2	51,8	61,3	78,0	92,1	110,3
	0,049	0,048	0,047	$\pm 0,089$	$\pm 0,088$	$\pm 0,088$
Аналитически	45,5	52,6	64,4	78,9	91,1	111,5
	0,052	0,049	0,049	$\pm 0,090$	$\pm 0,090$	$\pm 0,090$

ПРИМЕЧАНИЕ. В числителе частота  $f$  (Гц), в знаменателе коэффициент формы  $\psi$ . Масса ротора 367 кг.

При смещении датчиков на 0,3 м от концов ротора, как показано на рис. 4, происходит изменение коэффициентов форм. Для симметричных колебаний эти изменения очень малы, а для кососимметричных значения коэффициентов форм уменьшаются почти в 1,67 раза (0,054 вместо 0,09). Соответственно для этого случая значения коэффициентов форм для датчиков в модели (см. рис. 2) необходимо подставлять  $\bar{\psi}_{21} = -0,054$  и  $\bar{\psi}_{22} = 0,054$ .

Для сравнения и верификации проведённых расчётов значения собственных частот и коэффициентов форм колебаний ротора сведены в таблицу, где представлены значения, полученные из аналитических соотношений и численным способом при помощи МКЭ. Данные, приведённые в таблице, характеризуют изменение параметров в зависимости от жёсткости и подтверждают совпадение полученных результатов для различных способов расчёта виртуального ротора.

Кроме того, необходимо обратить внимание на существующую зависимость значений коэффициентов форм, используемых в расчётной модели ротора от мест расположения датчиков и электромагнитов СМП. На рис. 4. представлены две формы колебаний ротора как твёрдого тела, характеризующие соответственно симметричную и кососимметричную форму. На этом рисунке, в качестве примера, показано влияние смещения датчиков на соответствующие значения коэффициентов форм ( $\bar{\psi}_{21}$  и  $\bar{\psi}_{22}$ ). Эти факторы необходимо учитывать при использовании модели

ротора для анализа и синтеза СМП в целом.

Таким образом, рассмотренные вопросы идентификации динамических свойств ротора могут оказывать существенное влияние на точность моделирования процессов управления и определения параметров СМП. Представленное сравнение результатов анализа динамических свойств ротора, полученных различными способами, позволяет ещё глубже проникнуть в физическую сущность процессов, протекающих в модели ротора.

**Выводы:** 1. В результате модального анализа виртуального ротора установлено, что полученные собственные частоты ротора как твёрдого тела зависят от жёсткости опор и массы ротора. Коэффициенты форм колебаний зависят от массы ротора и мест расположения магнитных подшипников. 2. Динамические характеристики ротора можно идентифицировать по тонам колебаний с использованием математической модели ротора, имеющей постоянные параметры. 3. Разработанное представление динамических характеристик, полученных в модальном анализе, имеет решающее значение при формировании закона управления магнитными подшипниками ротора.

## Литература

1. Динамика и прочность турбомашин / А. Г. Костюк. – 3-е изд. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 476 с.
2. Математическая модель ротора для анализа управления магнитными подшипниками / А. П. Сарычев, И. Г. Руковицын // Вопросы электромеханики. Труды НИИ ВНИИЭМ. – М.: ФГУП «НИИ ВНИИЭМ», 2008. – Т. 107. – С. 11 – 15.

Поступила в редакцию 23.12.2014

*Азим Седрединович Абдурагимов, зам. генерального директора по космической и силовой электромеханике, т. (495) 365-25-45.*

*Владимир Петрович Верецагин, д-р техн. наук, главный научн. сотрудник, т. (495) 365-50-73.*

*Александр Валерьевич Рогоза, канд. техн. наук, начальник НПК, т. (495) 366-04-79.*

*Илья Геннадьевич Руковицын, канд. техн. наук, старший научн. сотрудник, т. (495) 366-35-65.*

*Алексей Петрович Сарычев, д-р техн. наук, первый заместитель генерального директора по атомной энергетике и электромеханике, т. (495) 366-56-29, e-mail: vniiem@vniiem.ru.*