УДК 51-74

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ПОДДЕРЖАНИЯ ГОТОВНОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ В УСЛОВИЯХ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ПОТОКА ОТКАЗОВ

А. Г. Широбоков, Р. Е. Мунаров

Предложен подход к разработке математических моделей процессов поддержания готовности летательных комплексов, безотказность которых характеризуется распределениями с возрастающей (убывающей) функцией интенсивности наработки на отказ. В процессе разработки математической модели использован аппарат полумарковских процессов. Проведено сравнение результатов, полученных с помощью разработанной модели, и с помощью моделей, разработанных ранее, для стационарного потока отказов. Получено полное совпадение результатов для параметра формы распределения Вейбулла – Гнеденко, равного единице.

Ключевые слова: *надежность, готовность, отказ, восстановление, процесс.*

Современный этап развития вооруженных сил характеризуется активной модернизацией образцов вооружения и заменой их на более современные. Между тем, значительное количество образцов вооружения находится на этапе завершения гарантийного срока эксплуатации и, по-видимому, будет продолжать эксплуатироваться еще достаточно долгий период времени, ожидая замены или модернизации.

В этих условиях особую актуальность приобретает формирование программ поддержания готовности образцов вооружения, как недавно введенных в эксплуатацию, так и эксплуатируемых уже в течение достаточно длительного времени.

Известно [1, 3], что начальный период и период за гарантийным сроком эксплуатации характеризуются соответственно распределениями убывающей и возрастающей функциями интенсивности (УФИ и ВФИ) наработки на отказ. Одним из наиболее используемых и универсальных, с этой точки зрения, является распределение Вейбулла – Гнеденко, представляющее собой при значении параметра формы $\beta < 1$ – УФИ-распределение, а при $\beta > 1$ – ВФИ-распределение. При значении $\beta = 1$ распределение Вейбулла – Гнеденко представляет собой экспоненциальное распределение с параметром $\frac{1}{\vartheta}$, где ϑ – параметр масштаба. Поэтому распределение Вейбулла – Гнеденко может быть с успехом использовано для описания наработки на отказ изделий, находящихся на этапах приработки, нормальной эксплуатации и старения.

В связи с вышеизложенным целесообразна разработка математической модели процесса поддержания (ПП) готовности образца вооружения с использованием распределения Вейбулла – Гнеденко.

В качестве образца вооружения рассмотрим летательный комплекс (ЛК), процесс поддержания готовности которого включает несколько состояний (табл. 1).

Граф переходов между состояниями процесса поддержания готовности ЛК представлен на рис. 1.

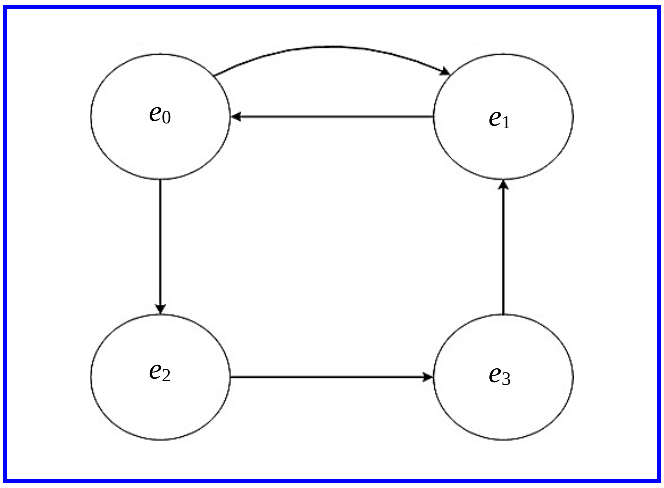

Рис. 1. Граф переходов состояний объекта

Таблица 1

Физический смысл состояний объекта

Состояние	Физический смысл состояния
e_0	ЛК работоспособен, находится в готовности к применению по назначению.
e_1	На ЛК проводятся ПП с технологически заданной продолжительностью $\tau_{ПП}$. На все время проведения проверок ЛК не готов к применению по назначению.
e_2	ЛК находится в неработоспособном состоянии вследствие возникновения на нем скрытого отказа.
e_3	На ЛК проводится устранение неисправности с продолжительностью, распределенной по экспоненциальному закону со средним значением $\tau_В$.

Таблица 2

Характеристики переходов между состояниями

Состояния		Характеристика перехода из состояния e_i в состояние e_j
e_i	e_j	
e_0	e_1	Через неслучайный промежуток времени $\tau_{МП}$ на ЛК проводятся ПП
	e_2	Через промежуток времени, распределенный по закону Вейбулла – Гнеденко с параметрами β (формы) и ϑ (масштаба), на ЛК возникает скрытый отказ, выявление которого возможно только при проведении ПП
e_1	e_0	Через неслучайный промежуток времени $\tau_{ПП}$ на ЛК завершается проведение ПП
e_2	e_3	Через среднее время μ_2 пребывания процесса в состоянии e_2 на ЛК выявляется отказ и немедленно начинается его устранение
e_3	e_1	На ЛК проводятся работы по устранению отказа с продолжительностью, распределенной по экспоненциальному закону со средним значением $\tau_В$.

В соответствии с общепринятым порядком [2, 3, 5] анализа полумарковских процессов необходимо определить:

1. Матрицу $Q_{ij}(t)$ независимой функции распределения времени пребывания ЛК в каждом состоянии исходя из физической сущности переходов графа, представленного на рис. 1.
2. Матрицу P_{ij} стационарной вероятности перехода ЛК из состояния e_i в состояние e_j.
3. Вектор μ_i среднего времени пребывания ЛК в состоянии e_i.
4. Вектор π_i стационарных вероятностей вложенных марковских цепей.
5. Вектор P_i стационарной вероятности пребывания ЛК в состоянии e_i.

Определение $Q_{ij}(t)$. Поскольку ПП следуют через неслучайные интервалы времени $\tau_{МП}$, то

$$Q_{01}(t)=\begin{cases}0, \ t<\tau_{МП} \\ 1, \ t\ge\tau_{МП}\end{cases}. \tag{1}$$

Переход из состояния e_0 в состояние e_2 осуществляется в случайное время t, распределенное по закону Вейбулла – Гнеденко с параметром формы β и параметром масштаба ϑ, поэтому

$$Q_{02}(t)=1-e^{-\left(\frac{t}{\vartheta}\right)^{\beta}}. \tag{2}$$

Из состояния e_1 в состояние e_0 ЛК перейдет после того, как полностью закончится цикл ПП длительностью $\tau_{ПП}$, поэтому

$$Q_{10}(t)=\begin{cases}0, \ t<\tau_{ПП} \\ 1, \ t\ge\tau_{ПП}\end{cases}. \tag{3}$$

Функция распределения

$$Q_{23}(t)=\begin{cases}0, \ t<\tau_{МП}-\mu_{02} \\ 1, \ t\ge\tau_{МП}-\mu_{02}\end{cases}, \tag{4}$$

где μ_{02} – среднее время пребывания ЛК в состоянии e_0 до момента перехода в состояние e_2.

Так как среднее время устранения неисправностей составляет τ_B, функция распределения

$$Q_{31}(t)=1-e^{-\left(\frac{t}{\tau_B}\right)}. \tag{5}$$

Определение P_{ij}. В соответствии с [2, 3, 5]

$$P_{ij}=\int_0^{\infty}\prod_{k\ne j}\left[1-Q_{ik}(x)\right]dQ_{ij}(x). \tag{6}$$

С учетом выражения (2)

$$P_{01}=\int_0^{\infty}\left[1-(1-e^{-\left(\frac{x}{\vartheta}\right)^{\beta}})\right]dQ_{01}(x). \tag{7}$$

Для вырожденных функций $dQ_{ij}(t)=0$ всюду, кроме регулярного момента скачка, в котором сосредоточена вся вероятность, то есть $dQ_{01}(\tau_{МП})=1$. Поэтому выражение (7) примет вид:

$$P_{01}=e^{-\left(\frac{\tau_{МП}}{\vartheta}\right)^{\beta}}. \tag{8}$$

Для определения P_{02} примем во внимание, что при $t\ge\tau_{МП}-1-Q_{01}(t)=0$ и верхний предел интегрирования в выражении (6) меняется на $\tau_{МП}$. Поэтому

$$P_{02}=1-e^{-\left(\frac{\tau_{МП}}{\vartheta}\right)^{\beta}}. \tag{9}$$

Вероятности

$$P_{23}=P_{31}=P_{10}=1, \tag{10}$$

в силу того, что из соответствующих состояний один выход.

Определение μ_i. Среднее время пребывания полумарковского процесса в состоянии e_i определяется выражением [2, 3, 5]:

$$\mu_i = \int_0^\infty [1 - F_i(t)]dt, \quad (11)$$

где $F_i(t)$ – безусловная функция распределения времени пребывания полумарковского процесса в состоянии e_i.

В свою очередь

$$F_i(t) = 1 - \prod_j \left[1 - Q_{ij}(t)\right]. \quad (12)$$

С учетом выражений (11, 12) получим

$$\mu_0 = \int_0^\infty [1 - Q_{01}(t)][1 - Q_{02}(t)]dt. \quad (13)$$

Подставляя (1) и (2) в (13) и меняя предел интегрирования, получим

$$\mu_0 = \int_0^{\tau_{\text{МП}}} \left[e^{-\left(\frac{t}{\vartheta}\right)^\beta} \right] dt. \quad (14)$$

Для $\tau_{\text{МП}} \geq 0$ интеграл в выражении (14) существует, следовательно

$$\mu_0 = \frac{\vartheta}{\beta}\left[\beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^\beta\right)\right], \quad (15)$$

где $\Gamma(n)$ – гамма-функция.

В состоянии e_1 ЛК пробудет до момента окончания ПП, то есть

$$\mu_1 = \tau_{\text{ПП}}. \quad (16)$$

Для определения μ_2 необходимо определить время μ_{02}, так как

$$\mu_2 = \tau_{\text{МП}} - \mu_{02}. \quad (17)$$

Величина μ_{02} определяется выражением:

$$\mu_{02} = \int_0^\infty [1 - F_{02}(t)]dt, \quad (18)$$

где $F_{02}(t)$ – условная вероятность перехода из состояния e_0 в состояние e_2.

В свою очередь

$$F_{02}(t) = \frac{P_{02}(t)}{P_{02}}, \quad (19)$$

где $P_{02}(t)$ – вероятность перехода из состояния e_0 в состояние e_2 за время t.

Подставляя (1) и (2) в (6) и меняя в выражении верхний предел интегрирования на t, получим:

$$P_{02}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\vartheta}\right)^\beta}, & t < \tau_{\text{МП}}. \\ 0, \ t \geq \tau_{\text{МП}} \end{cases} \quad (20)$$

Подстановка (9) и (20) в (19) дает

$$F_{02}(t) = \frac{1 - e^{-\left(\frac{t}{\vartheta}\right)^\beta}}{1 - e^{-\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^\beta}}. \quad (21)$$

Следует отметить, что функция (21) определена только на $0 \leq t \leq \tau_{\text{МП}}$, поэтому выражение (18) приобретает вид:

$$\mu_{02} = \int_0^{\tau_{\text{МП}}} \left[1 - \frac{1 - e^{-\left(\frac{t}{\vartheta}\right)^\beta}}{1 - e^{-\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^\beta}} \right] dt. \quad (22)$$

Интегрирование дает [4]

$$\mu_2 = \frac{\vartheta\left[\frac{\beta\tau_{\text{МП}}}{\vartheta} - \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) + \Gamma\left(\frac{1}{\beta}, \left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^\beta\right)\right] e^{\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^\beta}}{\beta\left[e^{\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^\beta} - 1\right]}. \quad (23)$$

Математическое ожидание времени

$$\mu_3 = \tau_B \quad (24)$$

получается путем подстановки (5) и (12) в (11).

Определение π_i. Система уравнений для вложенной марковской цепи имеет вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = P_{10}\pi_1; \\ \pi_1 = P_{01}\pi_0 + P_{31}\pi_3; \\ \pi_2 = P_{02}\pi_0; \\ \pi_3 = P_{23}\pi_2. \end{cases} \quad (24)$$

Нормирующее условие:

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \quad (25)$$

Заметим, что

$$P_{01} + P_{02} = 1. \quad (26)$$

Решение системы (24) с учетом (25) и (26) дает

$$\begin{cases} \pi_0 = \dfrac{1}{2(1+P_{02})}; \\ \pi_1 = \dfrac{1}{2(1+P_{02})}; \\ \pi_2 = \dfrac{P_{02}}{2(1+P_{02})}; \\ \pi_3 = \dfrac{P_{02}}{2(1+P_{02})}. \end{cases} \qquad (27)$$

Подставляя (9) в (27), окончательно получаем

$$\begin{cases} \pi_0 = \dfrac{1}{2\left[2-e^{-\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}}\right]}; \\ \pi_1 = \dfrac{1}{2\left[2-e^{-\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}}\right]}; \\ \pi_2 = \dfrac{1-e^{-\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}}}{2\left[2-e^{-\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}}\right]}; \\ \pi_3 = \dfrac{1-e^{-\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}}}{2\left[2-e^{-\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}}\right]}. \end{cases} \qquad (28)$$

Определение P_i. Используя выражение [2, 3, 5]:

$$P_i = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum\limits_{k=0}^{3} \pi_k \mu_k}, \qquad (29)$$

найдем значения стационарных вероятностей для каждого из состояний полумарковского процесса.

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{e^{\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}}\left[e^{\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}}-1\right]\left(\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)-\Gamma\left(\frac{1}{\beta},\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}\right)\right)}{\frac{\beta}{\vartheta}\left(e^{\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}}\left(\tau_{\text{ПП}}+\tau_B+\tau_{\text{МП}}\right)-\tau_B\right)}; \\ P_1 = \dfrac{\tau_{\text{ПП}}}{\tau_{\text{ПП}}+\tau_B-\tau_B e^{-\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}}+\tau_{\text{МП}}}; \\ P_2 = \dfrac{\vartheta\left[\frac{\beta\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}-\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)+\Gamma\left(\frac{1}{\beta},\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}\right)\right]e^{\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}}}{\beta\left(e^{\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}}\left(\tau_{\text{ПП}}+\tau_B+\tau_{\text{МП}}\right)-\tau_B\right)}; \\ P_3 = \dfrac{\tau_B}{\tau_{\text{ПП}}+\tau_B+\tau_{\text{МП}}+\dfrac{\tau_{\text{ПП}}+\tau_{\text{МП}}}{e^{\left(\frac{\tau_{\text{МП}}}{\vartheta}\right)^{\beta}}-1}}. \end{cases} \qquad (30)$$

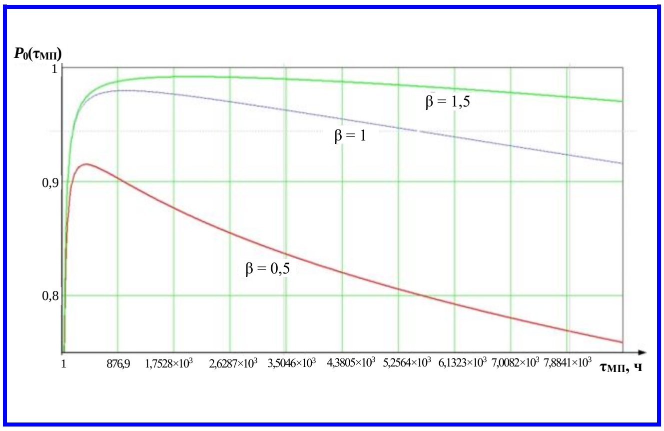

Рис. 2. Результаты моделирования для различных параметров формы

Система уравнений (30) представляет собой математическую модель процесса поддержания готовности ЛК, учитывающую нестационарность потока отказов на различных этапах эксплуатации.

Входными параметрами модели являются:

– параметры β (формы) и ϑ (масштаба) распределения Вейбулла – Гнеденко;

– среднее время восстановления τ_B (параметр экспоненциального распределения);

– величина межпроверочного интервала $\tau_{\text{МП}}$;

– продолжительность проверок $\tau_{\text{ПП}}$.

Показателем готовности в разработанной математической модели выступает вероятность P_0, представляющая собой, с физической точки зрения, среднюю долю времени, проводимого ЛК в исправном и готовом к применению состоянии.

Для проверки адекватности разработанной модели проведем расчет показателя готовности как функции $P_0(\tau_{\text{МП}}, \beta)$ для значений $\tau_{\text{ПП}} = 10$ ч, $\tau_B = 24$ ч, $\vartheta = 50\,000$ ч$^{-1}$.

Результаты расчетов с использованием системы Mathcad для значений параметра формы $\beta = \{0{,}5; 1; 1{,}5\}$ приведены на рис. 2.

Из графиков на рис. 2 видно, что полученные значения показателя готовности вполне соответствуют интуитивным представлениям для УФИ- и ВФИ-распределений. При величине $\beta = 1$ график в точности совпадает с результатом, полученным в [5] для стационарного потока отказов (экспоненциального распределения наработки на отказ).

Таким образом, разработанная математическая модель позволяет учитывать нестационарность потока отказов на этапе приработки и старения при формировании программ поддержания готовности как стареющих, так и вновь вводимых в эксплуатацию образцов вооружения.

Литература

1. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / Ф. Байхельт, П. Франкен ; перевод с немецкого. – Москва : Радио и связь, 1988. – 392 с. : ил.
2. Блаженков В. В. Введение в прикладную теорию полумарковских моделей эксплуатации сложных систем : учебное пособие / В. В. Блаженков – Москва : Редакционно-издательский центр МО СССР, 1979. – 69 с.
3. Волков Л. И. Управление эксплуатацией летательных комплексов: [учебное пособие для авиац. спец. вузов] / Л. И. Волков – Москва : Высшая школа, 1981. – 368 с. : илл.
4. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – Москва : Наука, 1973. – 228 с. : илл.
5. Токаренко Г. С. Моделирование программы поддержания вооружения в готовности к применению : методические рекомендации / Г. С. Токаренко. – Москва, 1994. – [7 п. л.].

Поступила в редакцию 28.09.2020

***Алексей Германович Широбоков**, кандидат технических наук, доцент,*
т. 8 (903) 276-67-09, e-mail: germ235@mail.ru.
(Военная академия РВСН им. Петра Великого).
***Роман Евгеньевич Мунаров**, начальник 430 ВП МО РФ,*
т. 8 (911) 624-39-49, e-mail: munar100@bk.ru.
(430 ВП МО РФ).

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL OF AIRCRAFT SYSTEM READINESS MAINTAINING PROCESS AT UNSTEADY FAILURE RATE

A. G. Shirokobokov, R. E. Munarov

An approach to development of mathematical models of readiness maintaining processes for aircraft systems, the reliability of which is characterized by distributions with an increasing (decreasing) MTBF rate function, is suggested. During the development of the mathematical model, the conceptual framework of semi-Markov processes has been used. The results obtained with the help of the developed model have been compared with those obtained with the help of the models developed earlier for a steady failure rate. The full coincidence of results for Weibull-Gnedenko distribution shape parameter has been obtained.

***Key words:** reliability, readiness, failure, recovery, process.*

References

1. Reliability and maintenance. Mathematical approach / F. Baihelt, P. Franken ; translated from German. – Moscow : Radio and communications, 1988. – 392 p. : with figures.
2. Introduction to applied theory of semi-Markov models of operation of complex systems : texbook / V. V. Blazhenkov – Moscow : Printing and publications center of the Ministry of Defense of the USSR, 1979. – 69 p.
3. Aircraft systems operation control: [textbook for specialized aviation universities] / L. I. Volkov – Moscow : Vysshaya Shkola Publishers, 1981. – 368 p. : with figures.
4. Tables of integrals and other mathematical formulas / G. B. Dvait. – Moscow : Nauka (Science), 1973. – 228 p. : with figures.
5. Modelling of weapon readiness maintaining program : methodological recommendations / G. S. Tokarenko. – Moscow, 1994. – [7 printed sheets].

***Aleksei Germanovich Shirobokov**, Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Associate Professor,*
tel.: +7 (903) 276-67-09, e-mail: germ235@mail.ru.
(Peter the Great Military Academy of the Strategic Missile Forces).
***Roman Evgenevich Munarov**, Head of 430th Military Representative Office,*
of the Ministry of Defence of the Russian Federation,
tel.: +7 (911) 624-39-49, e-mail: munar100@bk.ru.
(430th Military Representative Office of the Ministry of Defence of the Russian Federation).