

ОБЗОР ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Е. В. Овчинникова, П. А. Шмачилин, С. Г. Кондратьева,
Э. В. Гаджиев, С. В. Павлов, В. Р. Чекулов

Рассматриваются различные численные методы, используемые в электродинамике, включая метод конечных элементов, метод конечных разностей во времени и метод матрицы линии электропередачи. Численные методы играют решающую роль в электродинамике, поскольку они позволяют моделировать и анализировать сложные электромагнитные явления, которые трудно или невозможно изучать аналитически. Каждый метод имеет свои преимущества и недостатки. Понимание физики данных методов помогает инженеру выбрать метод, подходящий для конкретной задачи, а инженеру-программисту выполнить реализацию метода в коде.

Ключевые слова: численные методы, электродинамическое моделирование, электродинамика.

Введение

Численные методы – это разнообразный и мощный набор методов, которые были разработаны для преодоления ограничений аналитических методов при решении сложных математических задач. Такие задачи часто возникают в прикладной науке, инженерии, финансах и других областях, где поведение систем моделируется математическими уравнениями. Выгода использования численных методов основана на их способности приближать решения математических задач, которые в противном случае трудно или невозможно получить аналитически. Кроме того, развитие современных вычислительных технологий позволило реализовать эти методы на практике в беспрецедентных масштабах.

Основной принцип численных методов заключается в дискретизации непрерывных задач, которая включает в себя разбиение задачи на конечное число дискретных элементов или шагов [1]. Такая дискретизация позволяет аппроксимировать задачи и решать их итеративно, часто с возрастающей точностью по мере выполнения большего числа итераций. В зависимости от характера задачи для получения желаемого решения могут быть использованы различные численные методы [2].

Одним из наиболее фундаментальных численных методов в приложении к решениям задач электродинамики является метод конечных разностей, который используется для решения дифференциальных уравнений путем аппроксимации производных разностями. Этот метод получил широкое распространение в различных областях, начиная от механики жидкости и заканчивая теплопередачей и электромагнетизмом. Тесно связанные метод конечных объемов (МКО) и конечных элементов (МКЭ) популярны для решения уравнений в частных производных, описывающих сложные многомерные системы. Эти методы характеризуются разделением проблемной области на более мелкие элементы и аппроксимацией решения внутри каждого элемента.

За прошедшие годы численные методы претерпели значительное развитие и усовершенствование,

в результате чего появился целый ряд инструментов, которые теперь доступны для решения различных математических задач. Быстрое развитие компьютерного оборудования и программного обеспечения только усилило роль численных методов в решении современных задач. Ожидается, что в связи с продолжающейся конвергенцией высокопроизводительных вычислений и машинного обучения сферы применения и возможности численных методов будут продолжать расширяться, предлагая все более изощренные и эффективные подходы для решения сложных математических задач.

По мере того, как масштаб и сложность задач продолжают расти, важность внедрения передовых численных методов становится все более очевидной, особенно в реальных приложениях.

Несмотря на многочисленные достижения в области численных методов, остается нерешенным ряд проблем. Решение проблем, связанных со стабильностью, сходимостью и численными ошибками, особенно при наличии таких факторов как нелинейности, разрывы и особенности в базовых уравнениях, требует новых методов и подходов. Более того, растущий спрос на высокопроизводительные вычисления требует разработки более эффективных алгоритмов, которые могут в полной мере использовать преимущества параллельных и распределенных вычислительных архитектур.

Численные методы электродинамики

Численные методы играют решающую роль в решении различных задач электродинамики, поскольку они могут справиться со сложностью реальных систем и структур, которые трудно решить с помощью аналитических методов [3 – 5]. Некоторые широко используемые численные методы для решения задач электродинамики включают:

1. Метод конечных разностей во временной области (КРВО). КРВО – популярный метод решения уравнений Максвелла, дискретизирующий как временную, так и пространственную области с использованием конечных разностей. Он подходит

для широкого спектра применений, включая распространение волн, проектирование антенн, фотонику и метаматериалы.

2. МКЭ – широко используемый метод решения уравнений в частных производных, в том числе в электродинамике. Это включает в себя дискретизацию области на более мелкие элементы и аппроксимацию решения внутри каждого элемента. МКЭ популярен в электромагнетизме для моделирования различных радиочастотных и микроволновых устройств, волноводов и систем с временной гармоникой.

3. Метод моментов (ММ). ММ – это метод частотной области, который преобразует интегральные уравнения, такие как уравнения в электромагнетизме, в систему линейных уравнений с использованием базисных функций для аппроксимации электрического и магнитного полей. ММ широко используется при проектировании антенн, решении проблем рассеяния и анализе электромагнитной совместимости.

4. Метод граничных элементов (МГЭ). МГЭ, также известный как метод поверхностного интегрального уравнения, представляет собой численный подход, в основном используемый для решения внешних краевых задач. В контексте электродинамики МГЭ предполагает решение интегральных уравнений только по границам, что может привести к снижению вычислительной сложности по сравнению с методами, основанными на объемной дискретизации, такими как МКЭ и КРВО.

5. Подобно МКЭ, МКО – это метод решения уравнений в частных производных путем дискретизации области на небольшие контрольные объемы. В электродинамике МКО сохраняет поток электромагнитных полей за пределами контрольного объема, что делает его пригодным для моделирования волноводных структур, линий передачи и микроволновых цепей.

6. Метод спектральной области. Спектральные методы предполагают аппроксимацию решения с использованием глобальных базисных функций, таких как ряды Фурье или многочлены Чебышева. В электродинамике методы спектральной области подходят для задач с четко определенными периодическими структурами или однородными средами.

7. Метод матрицы линий электропередачи (МЛЭП). МЛЭП – это метод решения электромагнитных задач во временной области, основанный на поведении линий электропередачи. Это включает в себя дискретизацию проблемной области на узлы, соединенные линиями передачи, которые облегчают обмен напряжением и током.

Метод конечных разностей во временной области

Разностная схема КРВО выводится из системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме (1) и трех материальных уравнений (2):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}H &= \frac{dD}{dt} + j; \operatorname{rot}E = -\frac{dB}{dt}; \\ \operatorname{div}D &= p; \operatorname{div}B = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

где $\operatorname{rot}H$, $\operatorname{rot}E$ – роторы магнитного и электрического поля соответственно; D – электрическая индукция; B – магнитная индукция;

$$j = \sigma E + j_{\text{ст}}; D = \varepsilon \varepsilon_0 E; B = \mu \mu_0 H. \quad (2)$$

где j – плотность полного тока; $j_{\text{ст}}$ – сторонний ток; ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; μ – относительная магнитная проницаемость среды; μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Раскроем роторы полей по (3) и подставим значения магнитной и электрической индукции в первых двух уравнениях системы (1). Получим (4):

$$\operatorname{rot}F = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Для поля H :

$$\begin{cases} H_x[i, j, k]_+ = -\frac{\Delta t}{\mu \mu_0} \left(\frac{E_z[i, j+1, k] - E_z[i, j, k]}{\Delta y} - \frac{E_y[i, j, k+1] - E_y[i, j, k]}{\Delta z} \right); \\ H_y[i, j, k]_+ = -\frac{\Delta t}{\mu \mu_0} \left(\frac{E_x[i, j, k+1] - E_x[i, j, k]}{\Delta z} - \frac{E_z[i+1, j, k] - E_z[i, j, k]}{\Delta x} \right); \\ H_z[i, j, k]_+ = -\frac{\Delta t}{\mu \mu_0} \left(\frac{E_y[i+1, j, k] - E_y[i, j, k]}{\Delta x} - \frac{E_x[i, j+1, k] - E_x[i, j, k]}{\Delta y} \right). \end{cases}$$

Для поля E :

$$\begin{cases} E_x[i, j, k]_+ = +\frac{\Delta t}{\varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{H_z[i, j, k] - H_z[i, j-1, k]}{\Delta y} - \frac{H_y[i, j, k] - H_y[i, j, k-1]}{\Delta z} \right); \\ E_y[i, j, k]_+ = -\frac{\Delta t}{\varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{H_x[i, j, k] - H_x[i, j, k-1]}{\Delta z} - \frac{H_z[i, j, k] - H_z[i-1, j, k]}{\Delta x} \right); \\ E_z[i, j, k]_+ = +\frac{\Delta t}{\varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{H_y[i, j, k] - H_y[i-1, j, k]}{\Delta x} - \frac{H_x[i, j, k] - H_x[i, j-1, k]}{\Delta y} \right). \end{cases} \quad (4)$$

Системы уравнений (4) являются разностной схемой метода. С помощью нее описывается поле в любой момент времени в любой точке пространства.

Показан только один подход к выводу разностных схем. Существуют другие способы их вывода, которые приводят к такому же результату.

Данная разностная схема описывает сетку для магнитного и электрического поля, показанную на рис. 1.

Метод можно использовать не только в трехмерном пространстве, но и в двумерном и одномерном пространствах. Сетка для электрического и магнитного поля в двумерном пространстве показана на рис. 2.

Существуют другие разновидности метода. В данной статье описывается метод с ячейками с постоянным шагом. Существует метод КРВО с аддитивным шагом сетки, что оптимизирует классический метод.

Метод конечных элементов

Метод сводится к дискретизации пространства на конечные элементы и аппроксимацию решения внутри каждого элемента. В качестве конечных элементов обычно используют треугольники и квадраты в двумерном пространстве, кубы и пирамиды в трехмерном пространстве [6, 7].

Рассмотрим метод на примере двумерной задачи (рис. 3). Первым этапом необходимо провести разбиение области на конечно-размерные подобласти конечными элементами (данные элементы не являются дифференциалами площади).

Вершины одного треугольника пронумерованы для того, чтобы показать, что они являются узлами. В узлах значение поля вычисляется аналитически. Значения поля в остальных точках определяются значениями в узлах путем интерполяции [8, 9]. Для треугольника поле описывается приближенной зависимостью:

$$\varphi(x, y) = N_1\varphi_1(x, y) + N_2\varphi_2(x, y) + N_3\varphi_3(x, y), \quad (5)$$

где φ – значения поля в соответствующих узлах; N_1, N_2, N_3 – интерполяционные функции (функции формы, стыковочные функции).

Формула (5) помогает найти значение внутри конечного элемента. Для более точного решения необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), включающую в себя уравнения типа (5) для всех конечных элементов.

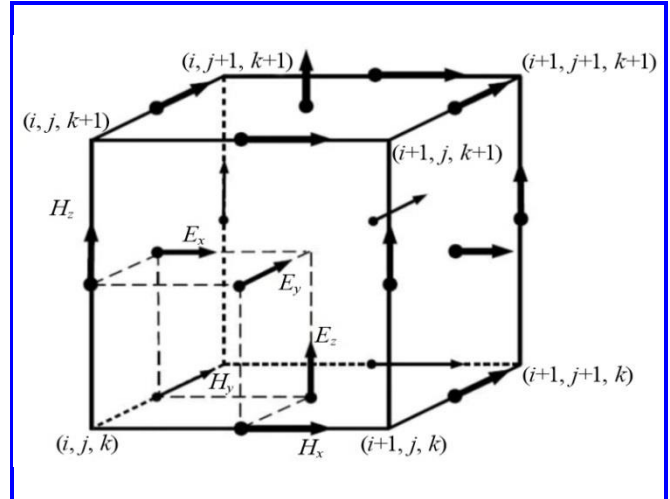


Рис. 1. Ячейка в методе конечных разностей во временной области

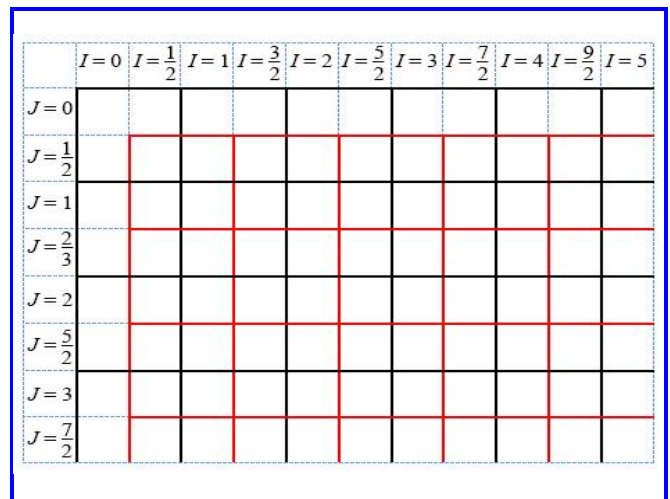


Рис. 2. Сетка для электрического и магнитного полей (черным цветом показаны границы ячеек электрического поля, красным – магнитного)

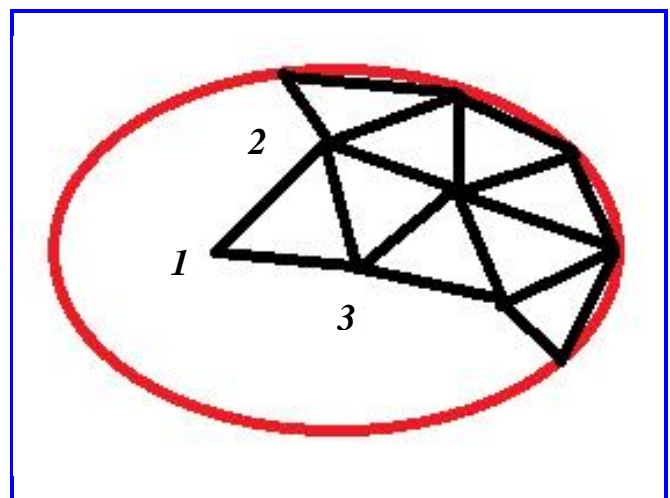


Рис. 3. Разбиение области решения задачи в методе конечных элементов

Метод моментов

ММ, также известный как метод взвешенных остатков, – это численный метод в вычислительном электромагнетизме. Он используется в компьютерных программах, имитирующих взаимодействие электромагнитных полей, таких как радиоволны, с веществом, например, в программах моделирования антенн, таких как NEC (Numerical Electromagnetics Code), которые вычисляют диаграмму направленности антенны. Как правило, это метод частотной области, он включает в себя проецирование интегрального уравнения на систему линейных уравнений путем применения соответствующих граничных условий [10]. Это делается с помощью дискретных сеток, как в методах конечных разностей и методах конечных элементов. Решения представлены линейной комбинацией заранее определенных базисных функций, как правило, коэффициенты этих базисных функций являются искомыми неизвестными.

Для многих приложений ММ идентичен МГЭ. Это один из наиболее распространенных методов в микроволновой и антенной технике.

С математической точки зрения ММ является методом решения следующей операторной задачи:

$$L(f) = g, \quad (6)$$

где $L(f)$ – оператор, заданный в некотором пространстве функций; g – известная функция. Под оператором в математике понимают действие, ставящее в соответствие функции функцию.

Для компактного изложения схемы ММ нам необходимо привлечь некоторые понятия из функционального анализа. К числу таких понятий относится скалярное произведение. Пусть мы имеем две функции f и g . Их скалярное произведение $\langle f, g \rangle$ должно удовлетворять следующим условиям:

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle; \quad (7)$$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle; \quad (8)$$

$$\langle f^*, f \rangle \geq 0, \text{ если } f \neq 0, \quad (9)$$

где α и β – постоянные; * означает комплексное сопряжение.

Представим неизвестную функцию f в виде разложения следующего вида:

$$f \approx \sum_n A_n \varphi_n, \quad (10)$$

где φ_n – известные функции, получившие название базисных функций; A_n – неизвестные коэффициенты.

Пусть функция f определена в некоторой области S . Подставим формулу (10) в (6):

$$\sum_n A_n L(\varphi_n) \approx g. \quad (11)$$

Мы также можем определить остаток для этого выражения, которое обозначает разницу между фактическим и приближенным решением:

$$R = \sum_n A_n L(\varphi_n) - g. \quad (12)$$

Целью ММ является минимизация этого остатка, что может быть сделано с помощью соответствующих функций взвешивания или тестирования, отсюда и второе название – метод взвешенных остатков.

Введем еще одну систему функций ψ_n , которые назовем тестовыми или пробными функциями. Умножим (11) последовательно на пробные функции с разными номерами и вычислим соответствующие скалярные произведения:

$$\sum_n A_n \langle \psi_n, L(\varphi_n) \rangle \approx \langle \psi_n, g \rangle. \quad (13)$$

Итак, в (13) мы получили СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов A_n . Если решить эту СЛАУ и найти A_n , то мы автоматически находим искомую функцию f . Собственно говоря, в этом и состоит весь ММ, который позволяет свести исходную операторную задачу к СЛАУ. Полученные СЛАУ эффективно решаются на электронной вычислительной машине (ЭВМ). Запишем СЛАУ (13) в матричной форме:

$$\mathbf{ZA} = \mathbf{G} \quad (14)$$

или

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_1, L(\varphi_1) \rangle & \dots & \langle \psi_1, L(\varphi_N) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_N, L(\varphi_1) \rangle & \dots & \langle \psi_N, L(\varphi_N) \rangle \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \psi_1, g \rangle \\ \vdots \\ \langle \psi_N, g \rangle \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Результирующую матрицу часто называют матрицей импеданса. Коэффициенты базисных функций могут быть получены путем инвертирования матрицы. Для больших матриц с большим количеством неизвестных для ускорения могут использоваться итерационные методы, такие как метод сопряженного градиента. Фактические распределения поля могут быть получены из коэффициентов и связанных с ними интегралов. Взаимодействие между каждой базовой функцией в ММ обеспечивается функцией Грина системы.

Используя (15), можно записать выражение для искомой функции f :

$$f = \langle \Phi, \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{G} \rangle. \quad (16)$$

Метод граничных элементов

При решении краевых задач приближенные модели технических объектов можно строить на основе интегральных уравнений. При этом первый шаг на пути к решению состоит в переходе от дифференциальных уравнений в частных производных к эквивалентным интегральным уравнениям. Во многих случаях, когда такой переход оказывается успешным, решение исходной задачи может быть получено с минимальными вычислительными затратами и высокой степенью точности. Кроме того, размерность исходной задачи понижается на 1, двухмерные задачи преобразуются в одномерные.

Все МГЭ строятся на основе общих принципов. При этом различают прямые и непрямые МГЭ.

В прямых МГЭ искомыми переменными краевой задачи являются величины, имеющие физический смысл, например, в задачах теории упругости – усилия и смещения, возникающие в элементах конструкции.

В непрямых МГЭ решение исходной задачи выражается через функции плотности, которые сами по себе не имеют реального физического смысла. После того как функции плотности найдены, значения реальных физических параметров задачи могут быть получены из них путем простого интегрирования.

В любом варианте МГЭ результатом перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к интегральным уравнениям в конечном счете является система уравнений, включающая значения переменных только на границе заданной области. Поэтому в отличие МКЭ и КРВО последующая дискретизация задачи проводится только на границе исследуемой области. Последнее обуславливает, во-первых, более высокую по сравнению с КРВО и МКЭ точность решения, во-вторых, существенно меньший объем входных данных при реализации методов на ЭВМ.

Данный метод известен в электромагнетизме как ММ, рассмотренный ранее.

Метод конечных объемов

МКО – это метод представления и оценки дифференциальных уравнений в частных производных в форме алгебраических уравнений. В МКО объем-

ные интегралы в дифференциальном уравнении в частных производных, содержащие член дивергенции, преобразуются в поверхностные интегралы, используя теорему о дивергенции. Затем эти условия оцениваются как потоки на поверхностях каждого конечного объема. Поскольку поток, поступающий в данный объем, идентичен потоку, выходящему из соседнего объема, эти методы консервативны. Еще одним преимуществом МКО является то, что он легко сформулирован для учета неструктурированных сеток. Метод используется во многих пакетах вычислительной гидродинамики. «Конечный объем» относится к небольшому объему, окружающему каждую узловую точку сетки.

МКО можно сравнивать с КРВО, которые аппроксимируют производные с использованием узловых значений, или МКЭ, которые создают локальные приближения решения с использованием локальных данных и строят глобальное приближение путем их объединения. Напротив, МКО вычисляет точные выражения для среднего значения решения по некоторому объему и использует эти данные для построения приближений решения внутри ячеек.

Рассмотрим одномерную задачу:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{df}{dx} = 0, \quad t > 0, \quad (17)$$

где $p = p(x, t)$ – переменная состояния; $f = f(p(x, t))$ – поток p .

Обычно положительный f определяет поток справа, а отрицательный f – слева. Если мы предположим, что уравнение (17) представляет собой текучую среду постоянной площади, мы можем разделить пространственную область S на конечные объемы или ячейки с центрами ячеек, проиндексированными как i . Для конкретной ячейки i мы можем определить среднее значение объема

$$p_i(t) = p(x, t) \text{ во время } t = t_1 \text{ и } x \in \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \text{ как}$$

$$\bar{p}_i(t_1) = \frac{1}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} p(x, t_1) dx \quad (18)$$

и во времени $t = t_2$ как

$$\bar{p}_i(t_2) = \frac{1}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} p(x, t_2) dx, \quad (19)$$

где $x_{i-\frac{1}{2}}$ и $x_{i+\frac{1}{2}}$ представляют местоположения верхней и нижележащих граней или ребер, соответственно, i -й ячейки.

Интегрируя уравнение (17) по времени мы имеем:

$$p(x, t_2) = p(x, t_1) - \int_{t_1}^{t_2} f_x(x, t) dt, \quad (20)$$

где $f_x = \frac{df}{dx}$.

Чтобы получить среднее значение по объему $p(x, t)$ за момент времени $t = t_2$, мы интегрируем

$p(x, t_2)$ по объему ячейки, $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right]$ и делим результат на $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, то есть

$$\bar{p}_i(t_2) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left(p(x, t_1) - \int_{t_1}^{t_2} f_x(x, t) dt \right) dx, \quad (21)$$

$$\bar{p}_i(t_2) = \bar{p}_i(t_1) - \frac{1}{\Delta x_i} \left(\int_{t_1}^{t_2} f_{i+\frac{1}{2}}(x, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} f_{i-\frac{1}{2}}(x, t) dt \right), \quad (22)$$

где $f_{i\pm\frac{1}{2}} = f(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t)$.

Таким образом, мы можем вывести полудискретную числовую схему для вышеупомянутой задачи с центрами ячеек, индексированными как i , и с потоками границ ячеек, индексированными как $i \pm \frac{1}{2}$, дифференцируя (22) по времени для получения:

$$\frac{d\bar{p}_i}{dt} + \frac{1}{\Delta x_i} \left[f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \right] = 0, \quad (23)$$

где значения граничных потоков $f_{i\pm\frac{1}{2}}$ могут быть восстановлены путем интерполяции или экстраполяции средних значений по ячейкам. Уравнение (23) является точным для средних значений объема, то есть при его выводе не было сделано никаких приближений.

Этот метод также можно применить к двумерной ситуации, рассматривая северную и южную грани, а также восточную и западную грани вокруг узла.

Метод спектральной области

Спектральные методы – это класс используемых в прикладной математике методик для численного решения некоторых дифференциальных уравнений,

иногда использующих быстрое преобразование Фурье. Идея заключается в представлении решения дифференциальных уравнений как суммы некоторых «базисных функций» (например, ряды Фурье являются суммой синусоид) с последующим выбором коэффициентов в сумме, наиболее удовлетворяющих заданным уравнениям [11].

Решим уравнение вида:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) = g(x, y), \quad (24)$$

где выражение слева означает вторую частную производную функции f по x и по y , соответственно. Это уравнение Пуассона и оно может быть физически проинтерпретировано как некоторый вид задачи передачи тепла или задачи в теории потенциалов.

Если мы запишем f и g в виде рядов Фурье:

$$f = \sum a_{j,k} e^{i(jx + ky)}; \quad (25)$$

$$g = \sum b_{j,k} e^{i(jx + ky)} \quad (26)$$

и подставим в дифференциальное уравнение, мы получим уравнение:

$$\sum -a_{j,k} (j^2 + k^2) e^{i(jx + ky)} = \sum b_{j,k} e^{i(jx + ky)}. \quad (27)$$

Мы поменяли местами частичное дифференцирование с суммированием, что законно, если мы предположим, например, что f имеет непрерывную вторую производную. Согласно теореме единственности разложения Фурье, мы должны тогда приравнять коэффициенты Фурье элемент за элементом, что дает

$$a_{j,k} = -\frac{b_{j,k}}{j^2 + k^2}, \quad (28)$$

что является формулой для коэффициентов Фурье $a_{j,k}$.

Вычисляем f путем взятия обратного преобразования Фурье для $a_{j,k}$.

Метод матрицы линий электропередачи

Метод МЛЭП – это метод дискретизации пространства и времени для вычисления электромагнитных полей. Он основан на аналогии между электромагнитным полем и сеткой из линий передачи. Метод МЛЭП позволяет вычислять сложные трехмерные электромагнитные структуры и зарекомендовал себя как один из самых мощных методов во временной области наряду с методом КРВО.

Метод МЛЭП основан на двух идеях. Во-первых, используются модели распространения волн Гюйгенса и рассеяния. Во-вторых, проводится аналогия между распространением поля и линиями передачи.

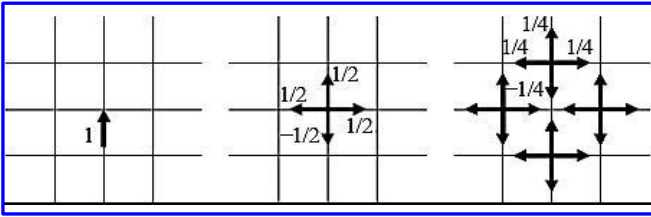


Рис. 4. Сетка в методе матрицы линий электропередачи

Следовательно, он рассматривает вычислительную область как сетку линий передачи, соединенных между собой в узлах. На рис. 4 рассматривается простой пример сетки 2D МЛЭП с импульсом напряжения амплитудой 1 В, падающим на центральный узел. Этот импульс будет частично отражен и передан в соответствии с теорией линий передачи. Если мы предположим, что каждая линия имеет характеристический импеданс Z , то падающий импульс фактически видит три параллельные линии передачи с общим импедансом, равным $Z/3$. Коэффициент отражения и коэффициент передачи задаются формулами:

$$R = \frac{Z/3 - Z}{Z/3 + Z} = -0,5; \quad (29)$$

$$T = \frac{2(Z/3)}{Z/3 + Z} = 0,5. \quad (30)$$

Энергия, вводимая в узел падающим импульсом, и общая энергия рассеянных импульсов, соответственно, равны:

$$E_t = v i \Delta t = 1(1/Z)\Delta t = \frac{\Delta t}{Z}; \quad (31)$$

$$E_s = \left[0,5^2 + 0,5^2 + 0,5^2 + (-0,5)^2 \right] \left(\frac{\Delta t}{Z} \right) = \frac{\Delta t}{Z}. \quad (32)$$

Следовательно, модель выполняет закон сохранения энергии.

Следующее событие рассеяния возбуждает соседние узлы в соответствии с принципом, описанным выше. Можно видеть, что каждый узел превращается во вторичный источник сферической волны. Эти волны объединяются, образуя общую форму волны. Это соответствует принципу распространения света Гюйгенса.

Заключение

Большое разнообразие методов, имеющих свои достоинства и недостатки, помогают решать задачи, которые встают перед инженерами различных

Поступила в редакцию 13.02.2024

Елена Викторовна Овчинникова, доктор технических наук, доцент, профессор, т. +7 (915) 323-40-36, e-mail: oea8888@gmail.com. (Московский авиационный институт; МГТУ им. Н. Э. Баумана).

отраслей народного хозяйства, в том числе и перед радиоинженерами.

Быстрое развитие вычислительной техники позволяет увеличить быстродействие программного обеспечения, использующего численные методы.

Литература

1. Гринев А. Ю. Математические основы и методы решения задач электродинамики : учеб. пособие / А. Ю. Гринев, А. И. Гиголо. – Москва : Радиотехника, 2015. – 126 с.
2. Гаджиев Э. В. Моделирование бортовых антенн СВЧ космических аппаратов / Э. В. Гаджиев // Антенны. – 2013. – № 9 (196). – С. 65–68.
3. Исследование характеристик направленности бортовых антенн космических аппаратов на ранней стадии разработки / Е. В. Овчинникова, П. А. Шмачилин, С. Г. Кондратьева [и др.] // Электросвязь. – 2016. – № 7. – С. 56–59.
4. Исследование характеристик направленности бортовых антенн космических аппаратов на ранней стадии разработки путем компьютерного моделирования / Э. В. Гаджиев, Е. В. Овчинникова, П. А. Шмачилин // Гагаринские чтения – 2016: Сборник тезисов докладов XLII Международной научной молодежной конференции (Москва, 12–15 апреля 2016 года) : в 4-х т. – Т. 1. – Москва : Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2016. – С. 509–510.
5. Математическое моделирование бортовых антенн космических аппаратов с учетом дифракции / Э. В. Гаджиев, С. Г. Кондратьева, Е. В. Овчинникова // Гагаринские чтения – 2016: Сборник тезисов докладов XLII Международной научной молодежной конференции (Москва, 12–15 апреля 2016 года) : в 4-х т. – Т. 1. – Москва : Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2016. – С. 499–500.
6. Банков С. Е. Электродинамика и техника СВЧ для пользователей САПР / С. Е. Банков, А. А. Курушин. – Москва, 2008. – 276 с. – URL: <http://jre.cplire.ru/jre/library/3/text.pdf>.
7. Кудин В. П. Метод конечных элементов в прикладной электродинамике / В. П. Кудин // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2017. – № 3 (102). – С. 153–159.
8. Банков С. Е. Расчет антенн и СВЧ-структур с помощью HFSS Ansoft / С. Е. Банков, А. А. Курушин. – Москва : ЗАО «НПП «РОДНИК», 2009. – 256 с.
9. Банков С. Е. Анализ и оптимизация трехмерных СВЧ-структур с помощью HFSS / С. Е. Банков, А. А. Курушин, В. Д. Разевиг // Москва : СОЛОН-Пресс, 2005. – 224 с.
10. Банков С. Е. Электродинамика для пользователей САПР СВЧ : учебник / С. Е. Банков, А. А. Курушин. – Москва : СОЛОН-Пресс, 2017. – 315 с.
11. Титаренко А. А. Спектральный метод и его применение при решении задач дифракции в закрытых волноводах / А. А. Титаренко // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2013. – Т. 16. – № 4. – С. 27–32.

Павел Александрович Шмачилин, кандидат технических наук, доцент,
т. +7 (916) 586-44-32, e-mail: shmachilin@gmail.com.
(Московский авиационный институт; РУДН).

Светлана Геннадьевна Кондратьева, кандидат технических наук, доцент,
т. +7 (915) 042-94-22, e-mail: kondratieff89@ya.ru.
(Московский авиационный институт).

Эльчин Вахидович Гаджиев, кандидат технических наук, доцент,
т. 8 (499) 158-47-40, e-mail: gadzhiiev_elchin@mail.ru.
(Московский авиационный институт; АО «Корпорация «ВНИИЭМ»).

Степан Владимирович Павлов, студент, т. 8 (499) 158-47-40, e-mail: pav00.00@mail.ru.
Василий Романович Чекулов, студент, т. 8 (499) 158-47-40, e-mail: chekulovv@yandex.ru.
(Московский авиационный институт).

REVIEW OF NUMERICAL SOLUTION METHODS OF ELECTRODYNAMIC PROBLEMS

**E. V. Ovchinnikova, P. A. Shmachilin, S. G. Kondratieva,
E. V. Gadzhiev, S. V. Pavlov, V. R. Chekulov**

Various numerical methods used in the electrodynamics including finite element method, finite difference time domain method and electric transmission line matrix method. Numerical methods play crucial role in the electrodynamics because they allow to simulate and analyze the complex electromagnetic phenomena which are difficult or impossible to study analytically. Each method has advantages or disadvantages. Understanding the physics of the present methods allows engineer to choose the method suitable for the specific task, and a software engineer to implement the method in code.

Key words: Numerical methods, electrodynamics modelling, electrodynamics.

References

1. Grinev A. Yu. Mathematical foundations and methods for solving electrodynamics problems: Study Guide / A. Yu. Grinev, A. I. Gigolo. – Moscow : Radiotekhnika, 2015. – 126 p.
2. Gadzhiev E. V. Modelling of onboard microwave antennas of spacecrafts / E. V. Gadzhiev // *Antennas*. – 2013. – No. 9 (196). – P. 65–68.
3. Research of spacecraft on-board antennas directivity at early stage of development / E. V. Ovchinnikova, P. A. Shmachilin, S. G. Kondratieva [at all.] // *Electrosvyaz magazine*. – 2016. – No. 7. – P. 56–59.
4. Investigation of satellite on-board antennas directivity characteristics at an early stage of development by means of computer modeling / E. V. Gadzhiev, E. V. Ovchinnikov, P. A. Shmachilin // *Gagarin readings – 2016: collected abstracts of conference papers of XLII International youth scientific conference (Moscow, 12–15 April 2016): in 4 volumes*. – Vol. 1 – Moscow: Moscow Aviation Institute (National Research University), 2016. – P. 509–510.
5. Mathematical modeling of spacecraft on-board antennas taking into account diffraction / E. V. Gadzhiev, S.G. Kondratieva, E. V. Ovchinnikova // *Gagarin readings – 2016: collected abstracts of conference papers of XLII International youth scientific conference (Moscow, 12–15 April 2016): in 4 volumes*. – Vol. 1 – Moscow: Moscow Aviation Institute (National Research University), 2016. – P. 499–500.
6. Bankov S. E. Electrodynamics and microwave technology for CAD users / S. E. Bankov, A. A. Kurushin. – Moscow, 2008. – 276 p. – URL: <http://jre.cplire.ru/jre/library/3/text.pdf>.
7. Kudin V. P. Finite element method in applied electrodynamics / V. P. Kudin // *News of Francisk Skorina Gomel State University*. – 2017. – No. 3 (102). – P. 153–159.
8. Bankov S. E. Calculation of antennas and microwave structures using HFSS Arisoft / S. E. Bankov, A. A. Kurushin. – Moscow: ZAO NPP Rodnik, 2009. – 256 p.
9. Bankov S. E. Analysis and optimization of three-dimensional microwave structures using HFSS / S. E. Bankov, A. A. Kurushin, V. D. Razevig // Moscow: SOLON Press, 2005. – 224 p.
10. Bankov S. E. Electrodynamics for users of microwave CAD: Study Book / S. E. Bankov, A. A. Kurushin. – Moscow: SOLON Press, 2017. – 315 p.
11. Titarenko A. A. Spectral method and it's application during solution of diffraction problems in closed waveguides / A. A. Titarenko // *Physics of Wave Processes and Radio Systems*. – 2013. – Vol. 16. – No. 4. – P. 27–32.

Elena Viktorovna Ovchinnikova, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor,
т. + 7 (915) 323-40-36, e-mail: oea8888@gmail.com.
(Moscow Aviation Institute, Bauman Moscow State Technical University).

- Pavel Aleksandrovich Shmachilin**, Candidate of Technical Sciences (Ph. D), Associate Professor,
t. +7 (916) 586-44-32, e-mail: shmachilin@gmail.com.
(Moscow Aviation Institute; RUDN).
- Svetlana Gennadievna Kondratieva**, Candidate of Technical Sciences (Ph. D), Associate Professor,
t. +7 (915) 042-94-22, e-mail: kondratieff89@ya.ru.
(Moscow Aviation Institute).
- Elchin Vakhidovich Gadzhiev**, Candidate of Technical Sciences (Ph. D), Associate Professor,
t. 8 (499) 158-47-40, e-mail: gadzhiev_elchin@mail.ru.
(Moscow Aviation Institute, JSC «VNIIEМ Corporation»).
- Stepan Vladimirovich Pavlov**, student, t. 8 (499) 158-47-40, e-mail: pav00.00@mail.ru.
- Vasiliy Romanovich Chekulov**, student, t. 8 (499) 158-47-40, e-mail: chekulovv@yandex.ru.
(Moscow Aviation Institute).